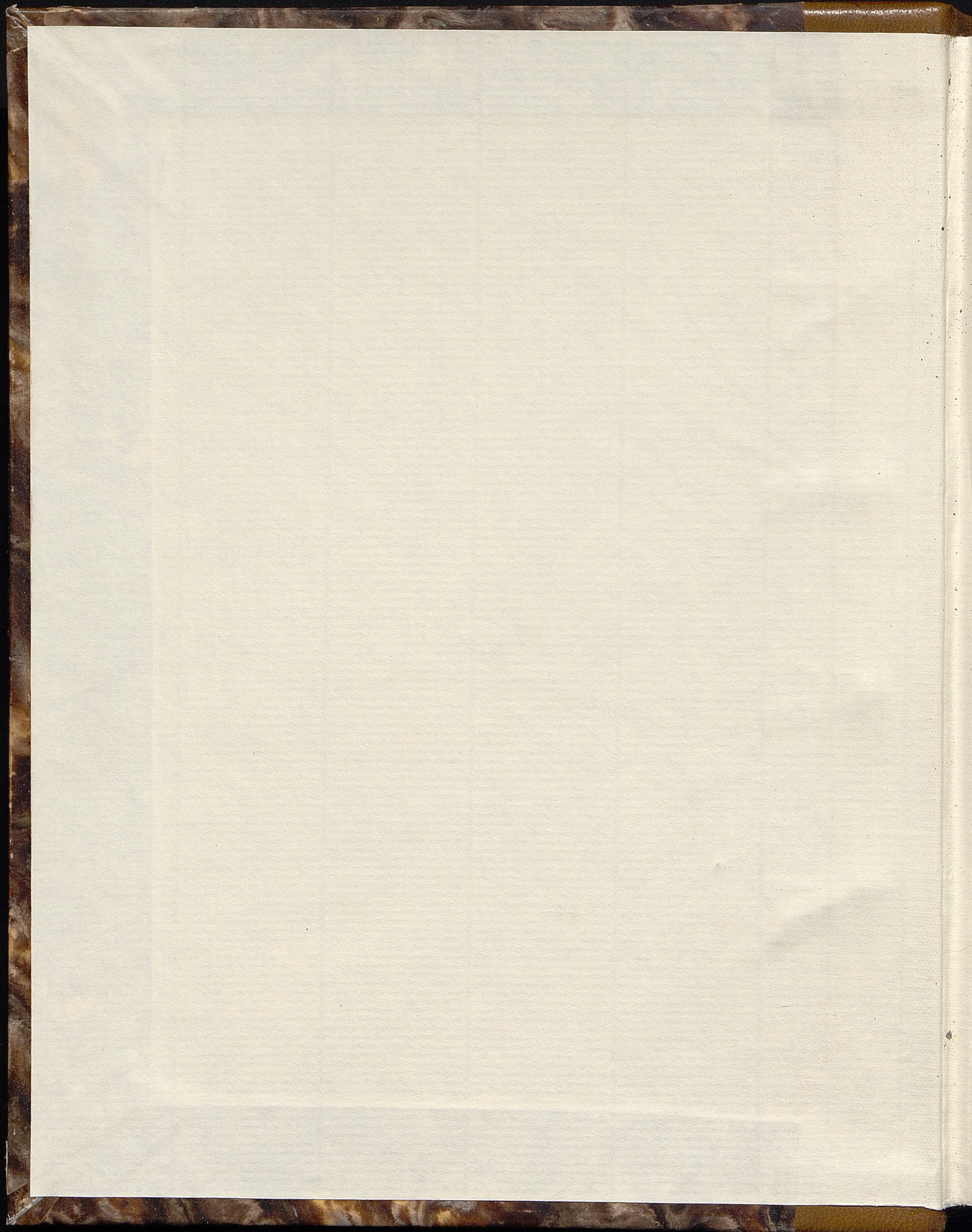
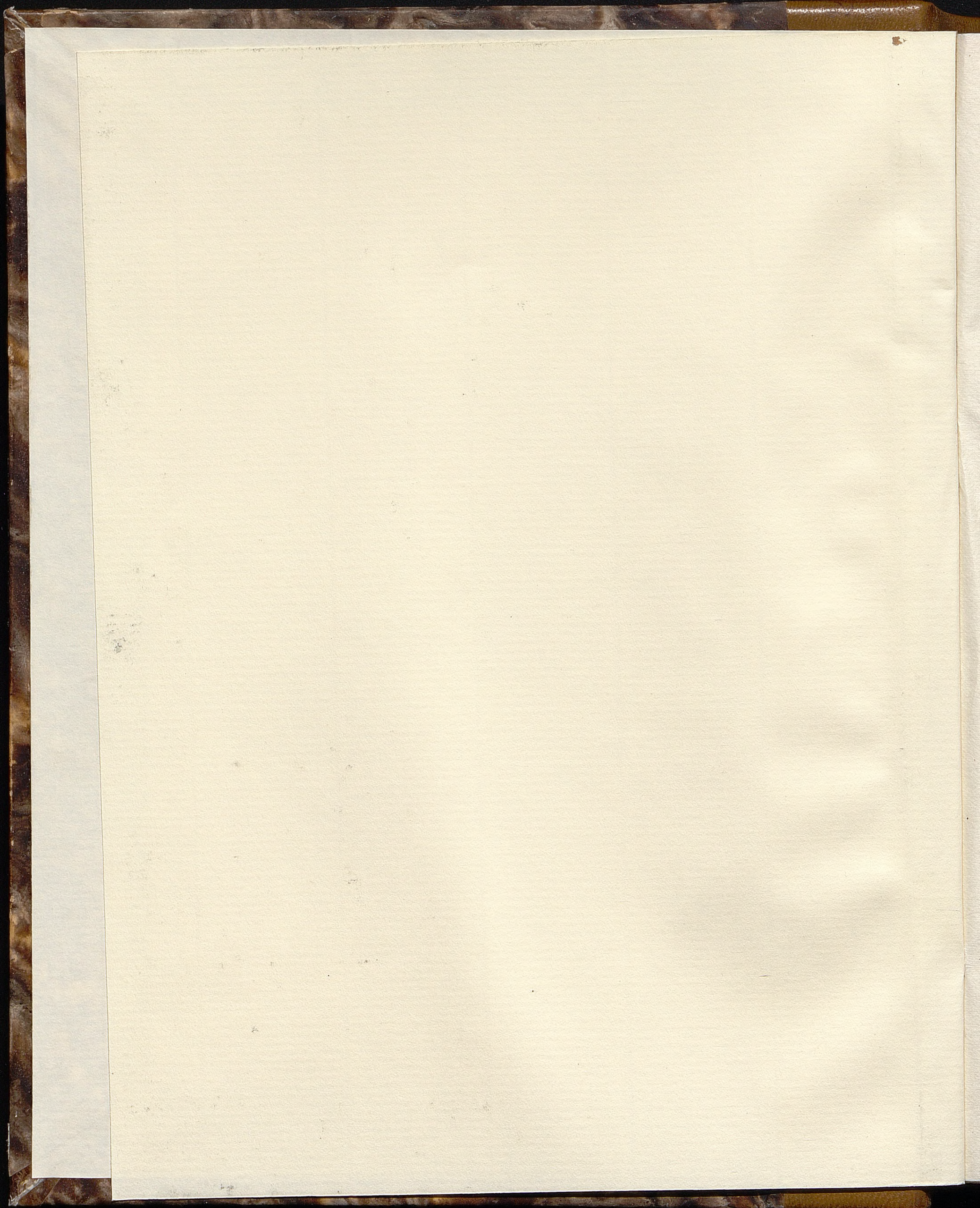

colorchecker CLASSIC
x·rite
mm

MÉLANGES.

E. M.









Théorie des Séries.

Cours de Mr. Duhamel
à la Sorbonne.



Préliminaires.

But de l'algèbre en Général : c'est de Résoudre Généralement les questions sur les nombres.

Pour cela, elle cherche à trouver une formule ou fonction.

Indécision de cette Expression : Cours d'algèbre Supérieure.

Méthode des Limites : c'est une des plus fécondes de l'analyse. — Définition du mot Limite. — Comment les Limites se sont introduites dans la science. — Elles servent 1°. comme moyen d'évaluer approximativement certaines quantités ; 2°. comme moyen d'investigation, eu égard à ce Théorème général :

Si l'on a toujours

$$F(\alpha \beta \gamma) = f(\alpha \beta \gamma)$$

α, β, γ étant des variables dont x, y, z sont les limites, F et f des fonctions continues, on a aussi

$$F(x\, y\, z) = f(x\, y\, z)$$

Trois manières principales de considérer les quantités finies comme limites de quantités variables.

1°. on peut considérer une quantité comme la limite du Rapport de deux Infiniment petits (c.à.d. deux variables dont la limite est zéro) : à ce point de vue se Rattache tout ce qui tient au problème des Tangentes, au Calcul Différentiel.

2°. on peut considérer une quantité comme limite d'une somme d'infiniment petits dont le nombre augmente indéfiniment. – Dans ce cas rentre ce qui se rattache aux Quadratures et au Calcul Intégral.

3°. on peut considérer une quantité comme limite d'une Somme de termes finis, mais de plus en plus petits, de façon qu'à mesure qu'on en ajoute la Somme tend vers une valeur déterminée. – on en a vu un premier exemple dans la conversion des fractions ordinaires en fractions Cinq décimales.

En généralisant cette dernière méthode, on arrive à développer les quantités en Séries,

et c'est là ce qui nous occupera d'abord.

Théorie des Séries.

On appelle en Général **Suite** ou **Série** une somme de quantités invariables, mais décroissant toujours, de façon que, à mesure qu'on en prend un plus grand nombre, la somme tend vers une limite déterminée qui est la valeur de la fonction qu'on a développée en Série.

Il est clair que les Séries servent, ou comme moyen d'approximation, ou comme moyen de déterminer des relations exactes entre les quantités mêmes qu'elles représentent.

Quand on donne une Série, deux choses doivent tout d'abord préoccuper :

1°. Savoir si elle est convergente.

2°. Chercher à calculer une limite supérieure de l'erreur commise quand on a ajouté un certain nombre de termes.

---

occupons-nous d'abord de donner quelques Règles sur la convergence des Séries.

Théorème.

Si, dans une Série convergente, tous les termes, à partir d'un certain d'entre eux, sont tous de même signe, positifs par exemple

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

toute Série

$$v_n \quad v_{n+1} \quad v_{n+2} \quad \cdots$$

dont les termes, positifs ou négatifs, seront, en valeur absolue, inférieurs aux termes correspondants de la première, cette série sera convergente.

Le fait est assez évident de lui-même pour qu'une démonstration soit superflue. — Ce Théorème est très-souvent utile dans l'application.

Théorème.

Si l'on a une Série convergente à termes tous positifs, et si l'on multiplie tous ces termes par des nombres finis, la nouvelle Série sera encore convergente.

Théorème.

Si l'on a une Somme toujours croissante, et cependant toujours inférieure à une quantité connue, il est certain que cette Somme a une limite.

Ne nous occupons que des Séries à termes tous positifs.

Il est clair que, pour qu'une Série quelconque, et à plus forte raison pour qu'une série ~~quel~~ à termes positifs soit convergente, il ~~et~~ faut que les termes de cette Série tendent vers zéro à mesure qu'on les prend plus éloignés.

Mais cette condition qui est nécessaire, n'est pas suffisante. On peut le voir sur un exemple, la Série Harmonique, qui est

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

En effet, je considère les n termes

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n}$$

qui suivent le ~~m~~ $n^{ième}$. Leur somme est plus grande que n fois le dernier ou $\frac{1}{2}$. Donc, après un terme qcq, on peut toujours trouver $\frac{1}{2}$ en ajoutant un certain nombre des termes restants. Donc la Série est divergente.

Le moyen le plus fécond usité pour reconnaître si une série est convergente consiste, à ~~reconnaître~~ à chercher si les termes de la Série sont respectivement plus ~~grands~~ petits que ceux d'une autre série démontrée convergente, ou plus grands que ceux d'une Série reconnue divergente. — Dans le premier cas, la Série proposée sera nécessairement convergente; et dans le second on pourra affirmer qu'elle croîtra à l'infini.

La plus simple des Séries convergentes connues est la progression Géométrique décroissante

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$$

dont la somme, on le sait, est $\frac{a}{1-q}$.

Si donc, étant donnée une Série ; on peut Reconnaî-tre que tous ses termes, à partir d'un certain d'entre eux, sont au-dessous de ceux d'une progression géométrique décroissante, on sera sûr que la Série proposée sera convergente. Et c'est là une des manières les plus utiles que l'on possède pour Reconnaître la convergence des Séries.

Voici comment on peut appliquer très simplement cette méthode.

On Remarque que, dans la progression Géométrique décroissante, le Rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ du $n^{ième}$ terme au précédent est constant, et égal à une quantité q plus petite que 1. — Donc si, dans une Série, on reconnaît que le Rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finit par rester toujours au-dessous d'une certaine quantité fixe k, plus petite que 1, il est clair qu'à partir du moment où cette loi se manifeste, tous les termes de la Série seront inférieurs à ceux d'une certaine progression Géométrique de Raison k. Donc la Série sera convergente.

D'ailleurs on peut développer davantage ce Raisonnement. Car si, après le terme u_n, on a toujours $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$, et $k < 1$, on aura

$$u_{n+1} < k . u_n$$

$$u_{n+2} < k . u_{n+1}$$
$$< k^2 . u_n \quad \text{a fortiori}$$

$$u_{n+3} < k . u_{n+2}$$
$$< k^3 u_n \quad \text{a fortiori}$$

etc.

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots < u_n (k + k^2 + k^3 + \dots)$$

Donc la Série est bien convergente.

Le moyen le plus naturel d'appliquer cette Règle consiste à prendre le Rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, qui est fonction de la seule variable n, et à chercher la Limite vers laquelle il tend quand n augmente indéfiniment. Soit

$$\text{Lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$$

Si $\lambda < 1$, il est clair qu'il arrivera toujours un moment où ~~la f~~ le Rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sera < une quantité $\lambda + \varepsilon$ plus petite que 1, et par suite la Série sera convergente.

Si maintenant on supposait que le Rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finit par devenir toujours supérieur à une quantité $k > 1$ il est clair que les termes de la Série seraient tous plus grands que ceux d'une certaine progression Géométrique croissante de Raison k, et que par suite la Série serait Divergente. D'ailleurs il serait facile de développer la démonstration.

On sera averti de ce cas, évidemment, quand la Limite λ de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sera Supérieure à 1.

Reste le cas douteux où cette limite λ serait Egale à 1. alors en général on ne peut Rien dire sans Recourir à d'autres règles. – Cependant, dans le cas où $\text{Lim.} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, mais où cependant ce Rapport, en s'approchant de sa limite, resterait toujours Supérieur à 1, on serait sûr que la Série serait Divergente, puisque chaque terme serait alors plus grand que le précédent. – Le seul cas véritablement douteux est celui où $\lambda = 1$ et où $\frac{u_{n+1}}{a_n}$, en s'approchant de 1, reste toujours Inférieur à cette Limite.

Dans le cas où la Série est convergente, et où l'on finit par avoir toujours $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$, $k < 1$, il est facile de déterminer une limite de l'erreur commise quand on s'arrête à un certain terme, pourvu que l'on connaisse la quantité k. — Car alors la somme de tous les termes qu'on néglige, si u_n est le 1er d'entre eux, se trouve inférieure à $u_n(1+k+k^2+\cdots)$ ou $\frac{u_n}{1-k}$: cette fraction représente la limite de l'erreur commise.

---

avant d'aller plus loin, appliquons ceci à quelques Exemples.

Prenons la Série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots$$

Est-elle convergente ? — $Lim.\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim\ \frac{1}{n+1} = 0$.

Elle est convergente.

Quelle est la limite de l'erreur commise quand on ne prend que n termes ? — Tous les autres sont plus petits que ceux de la progression Géométrique

$$\frac{1}{1.2..n}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right)$$

ou

$$\frac{n+1}{1.2.3\ldots(n-1)\,n^2}$$

ou bien encore, en remarquant que $n^2 > (n-1)(n+1)$ d'où, $\frac{n^2}{n-1} > n+1$, on aura cette autre limite de l'Erreur

$$\frac{\frac{n^2}{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)n^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1.2\ldots(n-2)(n-1)^2}$$

on voit mieux sous cette forme avec quelle rapidité la Série converge.

Cette Série est d'un grand ~~usage~~ dans l'analyse,

et on en désigne la somme par une lettre particulière, e ; de sorte que

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots$$

Il est facile de voir que

$$e = \text{Lim}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

quand m augmente indéfiniment.

on peut dire aussi que

$$e = \text{Lim}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

quand α tend vers zéro.

La démonstration de ce théorème est fort simple : - (voir le différentiel). -

Si, dans cette démonstration, on avait considéré la ~~se~~ le développement de

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

on aurait vu, absolument de la même manière, que, si m augmente indéfiniment, cette expression a pour limite la somme de la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

laquelle est nécessairem^t. converg^t. puisqu'elle donne $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$.
Mais d'autre part

$$\text{Lim.}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \text{Lim.}\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}\cdot x} = \text{Lim}\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x = e^x.$$

donc

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Il est facile de déduire de là le développent. de a^x.
Car

$$a = e^{La}, \quad a^x = e^{xLa}$$

d'où

$$a^x = 1 + \frac{(x\,La)}{1} + \frac{(x\,La)^2}{1.2} + \frac{(x\,La)^3}{1.2.3} + \cdots$$

en supposant les logarithmes pris dans la base de Néper.

on peut démontrer que le nombre e est irrationnel. Car d'abord,

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots$$

il est évident que e est compris entre 2 et 3 :
car $e > 2$ et $e < 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) < 2+1 < 3$.
Ensuite, si l'on avait

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{1.2..q} + \cdots$$

on en déduirait

$$1.2.3.(q-1)\,p = N + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+2} + \cdots$$

donc il faudrait que

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+2} + \cdots \text{ qui est } < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots \text{ ou } \frac{1}{q}$$

fût un nombre entier, ce qui est impossible.

Nous avons rencontré une série de la forme

$$A_0 x^0 + A_1 x^1 + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots$$

Ces sortes de séries se rencontrent souvent. — En appliquant la règle connue, on trouve

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{A_{n+1}}{A_n}\, x$$

Donc, si $\quad \lim \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lambda$

on aura

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda x$$

Donc, pour qu'une telle série soit convergente, il faudra que l'on ait $\quad \lambda x < 1$

et si $\lambda x > 1$, elle sera divergente.

D'où cette conséquence importante : Il est possible qu'une telle série soit convergente pour certaines valeurs de x et non pas pour d'autres. — Il faudra toujours pour la convergence qu'on ait $x < \frac{1}{\lambda}$.

Dans le cas particulier où $\lambda = 0$, x n'est pas limité et la série est toujours convergente. — Tel est le cas de la série qui donne a^x.

Si une série est convergente pour $x = \alpha$, elle l'est encore pour $x < \alpha$.

Prenons pour exemple la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Ici $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{n}{n+1}$ et $\lambda = 1$. Donc, pour que la série soit convergente, il faut que l'on ait $x < 1$. — $x = 1$, cas douteux en général, rendrait ici la série divergente.

La considération des progressions géométriques nous a déjà fourni un premier caractère de convergence. — Elle va nous en donner un autre, moins simple, bien que plus commode en certains cas.

Dans une progression géométrique décroissante

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$$

on remarque que $\sqrt[n]{u_n} = q\sqrt[n]{a}$, d'où $\lim u_n^{\frac{1}{n}} = q$, et $q < 1$. — C'est la même chose dans la progr. géom. croissante, seulement $q > 1$. — Il est évident d'après

cela que si, dans une série qcq., $u_n^{\frac{1}{n}}$ finit par être toujours plus petit que k, $k < 1$, la série aura tous ses termes inférieurs à ceux d'une certaine progression géom. décroissante; — si $u_n^{\frac{1}{n}} > k$, $k > 1$, ces termes seront supérieurs à ceux d'une certaine progress. géom. croissante : — et la série sera convergente dans le premier cas, divergente dans le second. — on pourrait aisément développer la démonstration. — Ces deux cas se reconnaîtront en prenant $\lim u_n^{\frac{1}{n}} = \alpha$, et cherchant si $\alpha < 1$, $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$. — Dans ce dernier cas, il y a doute. (x)

(x) Si pourtant $\lim u_n^{\frac{1}{n}} =$
mais qu'on ait toujours
$$u_n^{\frac{1}{n}} > 1$$
on en déduira
$$u_n > 1$$
donc la série sera alors diver

Les deux règles que nous avons données jusqu'ici pour la convergence des séries, et fondées sur la considération de $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ou de $\lim. u_n^{\frac{1}{n}}$, rentrent parfaitement l'une dans l'autre, c.a.d. ne pénètrent toutes deux qu'au même point dans l'exploration d'une série. Toute série qui présentera le cas douteux à une des deux règles le présentera aussi à l'autre : de façon qu'on prend indifféremment l'une ou l'autre, selon la commodité.

Cette assertion est en quelque sorte intuitive, puisque ces deux règles ont été déduites de la comparaison de la série à une progression géométrique décroissante, et résultent de deux propriétés de cette progression qui, au fond, reviennent au même.

Au reste, il est facile de démontrer rigoureusement

cette coïncidence des deux Règles.

J'ai besoin pour cela de deux Théorèmes d'analyse que je vais démontrer préalablement.

Supposons que je cherche $\text{Lim}\ \frac{\varphi(x)}{x}$ quand x croît indéfiniment. — cette limite est la même que celle de $\varphi'(x)$ pour x infini. — Mais

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \varphi'(x+\theta h)$$

et, si x augmente indéfiniment, on pourra donner à h une valeur finie quelconque, 1 par ex., laquelle sera toujours infiniment petite devant x; et l'on aura

$$\text{Lim}\ \frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{1} = \text{Lim}\ \varphi'(x+\theta)$$
$$= \text{Lim}.\ \varphi'(x)$$

Donc enfin

Théorème. — Si x augmente indéfiniment, on a toujours $\text{Lim}.\ \frac{\varphi(x)}{x} = \text{Lim}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)\right]$.

Cherchons encore $\text{Lim}.\left[\varphi(x)\right]^{\frac{1}{x}}$ quand x augmente indéfiniment.

Cherchons pour cela la limite du Logarithme, qui est $\frac{1}{x}\ \mathcal{L}.\ \varphi(x)$. — D'après le théorème précédent, cette limite sera la même que celle de $\left[\mathcal{L}.\ \varphi(x+1) - \mathcal{L}.\ \varphi(x)\right]$ ou de $\mathcal{L}.\ \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}$. Donc la limite cherchée est la même que celle de $\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}$. Donc

Théorème. — Si x augmente indéfiniment, on a toujours $\text{Lim}.\left[\varphi(x)\right]^{\frac{1}{x}} = \text{Lim}.\ \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}$.

Si l'on applique ce dernier Théorème au

cas qui nous occupe, et si l'on remarque que $\varphi(x) = u_n$, $\varphi(x+1) = u_{n+1}$, on trouve immédiatement

$$\text{Lim}\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{Lim.}\ u_n^{\frac{1}{n}}$$

c.q.f.d.

Voici une troisième règle qui peut s'appliquer à des cas que n'atteignent pas les deux premières.

Soit la série

(1) $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$

Je forme la série

(2) $u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \cdots$

Elle n'a pas la même limite que la première ; mais je dis qu'elle est convergente ou divergente en même temps,

En supposant que, dans la série (1), tous les termes soient positifs et aillent toujours en décroissant.

En effet : – les 8 termes de u_8 à u_{16} par ex. dans (1) font une somme $< 8u_8$; les 16 termes de u_{16} à u_{32} en font une $< 16u_{16}$, et ainsi de suite. Donc, à partir d'un certain moment, la série (2) l'emporte sur (1) ; donc si (1) diverge, (2) divergera aussi.

D'autre part, $8u_8 < 2$ fois chacun des 4 termes qui sont entre u_4 et u_8 ; $16u_{16} < 2$ fois chacun des 8 termes qui sont entre u_8 et u_{16}. Donc, la série (2) < 2 f. la série (1). Donc, si (1) converge, (2) convergera aussi.

donc réciproquement, s'il est plus commode d'étudier la convergence ou la divergence de la série (2), on le fera, et l'on sera sûr que la série (1) sera convergente ou divergente en même temps.

En voici un exemple. — Soit la série

$$(1) \qquad \frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \cdots$$

Je forme la série (2)

$$(2) \qquad 1 + \frac{1}{2^{\mu-1}} + \frac{1}{4^{\mu-1}} + \frac{1}{8^{\mu-1}} + \cdots$$

c'est une progression géométrique ; décroissante pour $\mu > 1$, croissante pour $\mu < 1$. — Donc la série (1) sera convergente pour $\mu > 1$, divergente pour $\mu < 1$. — Pour $\mu = 1$, la série (2) est encore divergente ; donc aussi (1), ce qui se voit du reste immédiatement.

La considération de cette série particulière

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots$$

convergente pour $\mu > 1$, conduit à une nouvelle règle de convergence assez utile, et distincte des précédentes. — Il est clair en effet que si l'on reconnait que l'on a toujours $u_n < \frac{1}{n^\mu}$, $\mu > 1$, la série expérimentée sera convergente : — ou bien encore, si l'on a $\frac{1}{u_n} > n^\mu$, ou $L.\frac{1}{u_n} > \mu L.n$, ou enfin

$$\frac{L\frac{1}{u_n}}{Ln} > \mu \qquad \mu > 1.$$

si cela a lieu à partir d'une certaine valeur de n, la série sera convergente. — On s'en assurera encore en cherchant si

$$\text{Lim.}\ \frac{L.\frac{1}{u_n}}{L.\ n} = \lambda \quad , \lambda > 1 .$$

Si au contraire $\lambda < 1$, il y aurait divergence; et doute pour $\lambda = 1$.

Nous avons encore un moyen de juger si une série est convergente ou divergente: en cherchant si, dans cette série, le rapport d'un terme au précédent $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finit par être toujours plus petit que ce même rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ dans une série reconnue convergente, ou plus grand que ce rapport dans une série connue pour divergente.

Cela devient évident si l'on multiplie tous les termes d'une des deux séries par un facteur convenable, de façon à que deux termes de ces séries soient les mêmes, $u_n = v_n$ par exemple.

Ce dernier caractère, avec la considération de la même série que tout-à-l'heure, savoir

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \cdots$$

va nous conduire à un caractère de convergence plus précieux que tous les précédents, et s'appliquant aux cas où $\text{Lim.}\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Pour cela, nous avons besoin de démontrer d'abord ce théorème d'algèbre.

Théorème. — Soit α une quantité infinimt. petite. alors $\lim (1+\alpha)^m = 1$, et $(1+\alpha)^m = 1+\varepsilon$. — Je dis que, dans ε, la partie infiniment petite du premier ordre est égale à $m\alpha$, et que l'on a

$$(1+\alpha)^m = 1 + m\alpha(1+\omega).$$

1°. Dans le cas de m entier, cela se voit immédiatement par le développemt. du binome.

2°. Soit $m = \frac{1}{n}$. — on a alors

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{n}} = 1+z$$

et je cherche la partie infinimt. petite de z. — De là

$$1+\alpha = (1+z)^n$$
$$= 1 + nz(1+\omega)$$
$$z = \frac{\alpha}{n}\cdot\frac{1}{1+\omega} = \frac{\alpha}{n}(1+\omega')$$

donc

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\alpha}{n}(1+\omega')$$

3°. Soit $m = \frac{p}{q}$. —

$$(1+\alpha)^{\frac{p}{q}} = 1+z$$
$$(1+\alpha)^p = (1+z)^q$$
$$1 + p\alpha(1+\omega) = 1 + qz(1+\omega')$$
$$z = \frac{p}{q}\alpha(1+\omega'')$$

donc

$$(1+\alpha)^{\frac{p}{q}} = 1 + \frac{p}{q}\alpha(1+\omega'') \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Ce théorème peut encore se démontrer par un artifice tout particulier, ~~et~~ un peu détourné peut-être, mais très

-utile dans beaucoup de circonstances. — Le voici.

Je dis que
$$(1+\alpha)^m = 1 + m\alpha(1+\omega)$$
ou
$$\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha} = m(1+\omega)$$
il faut démontrer que le premier membre tend vers m.

Je pose
$$(1+\alpha)^m - 1 = \beta$$
d'où
$$(1+\alpha)^m = 1+\beta$$
$$m\,\mathcal{L}(1+\alpha) = \mathcal{L}(1+\beta)$$
et je dis que $\mathrm{Lim}\,\frac{\beta}{\alpha} = m$. or $\mathrm{Lim}\,\frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{Lim}\left(\frac{m\beta\,\mathcal{L}(1+\alpha)}{\alpha\,\mathcal{L}(1+\beta)}\right)$

$= \mathrm{Lim}.\left(m\frac{\beta}{\mathcal{L}(1+\beta)}\cdot\frac{\mathcal{L}(1+\alpha)}{\alpha}\right) = m.$ c.q.f.d.

car $\frac{\mathcal{L}(1+\alpha)}{\alpha} = \mathcal{L}.(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. et $\mathrm{Lim}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, $\mathcal{L}.e$

Ce même artifice peut servir, puisque l'occasion s'en présente, à trouver $\mathrm{Lim}.\,\frac{(1+\alpha)^m - 1}{m}$

α étant une constante, et m tendant vers zéro. — Po-sons encore
$$(1+\alpha)^m = 1+\beta$$
$$m\,\mathcal{L}(1+\alpha) = \mathcal{L}(1+\beta)$$
$$\mathrm{Lim}\,\frac{\beta}{m} = \mathrm{Lim}.\left[\frac{m\beta\,\mathcal{L}(1+\alpha)}{m\,\mathcal{L}(1+\beta)}\right] = \mathrm{Lim}\left[\frac{\beta}{\mathcal{L}(1+\beta)}\,\mathcal{L}(1+\alpha)\right]$$
$$\mathrm{Lim}\,\frac{\beta}{m} = \mathcal{L}(1+\alpha).$$

Revenons maintenant à nos Séries, et au caractère de convergence que nous avons à donner.

Soit
$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$$

la Série proposée. — Je la compare à la Série

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots + \frac{1}{n^\mu} + \frac{1}{(n+1)^\mu} + \cdots$$

convergente si $\mu > 1$. — Et je remarque que la Série donnée sera convergente si l'on peut trouver un nombre $\mu > 1$ tel que l'on ait toujours, à partir d'une certaine valeur de n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^\mu < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\mu}$$

or, puisque, par hypothèse, $\text{Lim.}\,\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on peut poser $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha}$. alors l'inégalité à satisfaire sera

$$1+\alpha > \left(1+\frac{1}{n}\right)^\mu$$

$$> 1+\frac{\mu}{n}\left(1+\omega\right)$$

$$n\alpha > \mu\left(1+\omega\right)$$

Si cela est, la Série sera convergente. — Et comme, si n augmente indéfiniment, $\mu(1+\omega)$ a pour limite μ, on voit qu'il suffira de chercher

$$\text{Lim}\; n\alpha = \lambda$$

et, si $\lambda > 1$, la Série proposée sera convergente. On verrait par des raisonnements inverses qu'elle serait divergente si $\lambda < 1$.

Reste encore le cas douteux où $\lambda = 1$. Cependant, si l'on avait toujours, avant la limite, $n\alpha < 1$: on en déduirait

$$n\alpha < 1$$

$$\alpha < \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}} > \frac{n}{n+1}$$

ou enfin . . . $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$

or la série $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots$ est divergente. Donc aussi la série proposée diverge dans ce cas.

Voici, pour l'application de cette Règle, un Exemple devant lequel les autres échoueraient.

Soit la série

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$$

Ici

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+2}=\frac{1}{1+\frac{2}{n}}, \quad \alpha=\frac{2}{n}$$

Donc $n\alpha=2$, la série est convergente. — Il est facile de voir que sa valeur est 1.

Soit encore la série

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}+\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n+2)}\cdot\frac{1}{2n+3}+\cdots$$

on aura

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}=\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}=\frac{1}{1+\frac{6n+5}{4n^2+4n+1}}$$

$$n\alpha=\frac{6n+5}{4n+4+\frac{1}{n}}$$

$$\lim n\alpha=\frac{3}{2}$$

Donc la série est convergente.

Cette série se présente quelquefois sous la forme

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\cdots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}+\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n+2)}+\cdots$$

Mais alors elle est divergente. Car alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{1}{1+\frac{1}{2n+1}} \qquad n\alpha=\frac{1}{2+\frac{1}{n}} \qquad \lim n\alpha=\frac{1}{2}.$$

La série est bien divergente. — Pourtant on pourrait voir que les termes, pris individuellement diminuent de plus en plus et sans autre limite que zéro.

Occupons-nous maintenant d'un peu des séries à termes positifs et négatifs.

Théorème. — Si, dans une pareille série, les termes, à partir d'un certain rang, vont toujours en décroissant et en tendant vers zéro, et si de plus ils sont alternativement positifs et négatifs, la série sera toujours convergente.

Prenons une série qui satisfasse à ces conditions :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + u_{n+4} - \cdots$$

Désignons en général par S_p la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_p$. Il est facile de voir que les sommes successives

$$S_n \;,\; S_{n+2} \;,\; S_{n+4} \;,\; \cdots$$

prises en s'arrêtant toujours à un terme positif, sont, d'après nos hypothèses, toutes plus grandes que la somme de tous les termes de la série, (x), et vont d'ailleurs en décroissant sans cesse. — au contraire les sommes

$$S_{n+1} \;,\; S_{n+3} \;,\; S_{n+5} \;\cdots$$

sont toutes plus petites que la somme de tous les termes de la série, et vont toujours en diminuant. —

Donc la somme des termes de la série est toujours comprise entre deux sommes consécutives S_{n+2p} et S_{n+2p-1},

(x) cela ne suffirait pas pour prouver que la série est convergente. car par ex. la série

$$a - a + a - a + a - a - \cdots$$

est divergente bien que l'ensemble de tous les termes ne dépasse jamais la valeur a.

dont la différence, u_{n+2p}, tend vers zéro. Donc la série est convergente, puisque les deux séries sommes convergent d'ailleurs vers une même limite. —

Maintenant, l'erreur qu'on commet en s'arrêtant à un certain terme a évidemt. pour expression le terme suivant.

ainsi la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

est convergente (bien que, si l'on rend tous ses termes positifs, elle devienne divergente), et l'erreur commise quand on s'arrête au terme $\frac{1}{n}$ inclusivt. a pour limite $\frac{1}{n+1}$; c.à.d. est plus petite que $\frac{1}{n+1}$, — et est évidemt. de signe contraire à celui du terme $\frac{1}{n}$ auquel on s'arrête. Cette dernière remarque est générale.

Nous allons démontrer maintenant un théorème dû à Abel et relatif aux séries à termes positifs et négatifs.

Pour cela, nous nous appuierons sur le théorème suivant

Théorème. — Si $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sont des quantités finies et positives, et si $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ sont des quantités finies quelconques, on a

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\beta$$

β étant une moyenne entre la plus grande et la plus petite des quantités $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$.

En effet, soient d'abord $\beta_0, \beta_1, \ldots$ positifs. Désignons par β_p la plus petite de ces quantités et par β_q la plus grande. On a

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n < (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\beta_q$$

$$> (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\beta_p$$

Donc, si β est une certaine valeur comprise entre β_p et β_q, on a évidemment

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n = (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\beta$$

Ce raisonnement est fondé sur ce que $\alpha_0\beta_0$ par exemple est plus petit que $\alpha_0\beta_q$, et plus grand que $\alpha_0\beta_p$. Or, si α_0 était négatif, on ne pourrait plus l'affirmer, et notre raisonnement ne pourrait s'appliquer.

Si $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ étaient des quantités, les unes positives, les autres négatives, on pourrait toujours faire le même raisonnement en regardant comme la plus petite et la plus grande de ces quantités celles qui ont la plus petite et la plus grande valeur relative.

Remarquons maintenant que, quelles que soient les quantités α et β, on peut toujours choisir une quantité β_0 telle que $\alpha\beta = \alpha_0\beta_0$, α_0 étant positif. Donc ce que nous venons de dire peut s'appliquer à toute somme de la forme $\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$.

Cela posé, voici quel est le théorème d'Abel.

Théorème. — Soit une série convergente à termes quelconques

$$(1) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$



Soient $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ des quantités positives et décroissantes ; je dis que la série

$$(2) \qquad \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \dots + \varepsilon_n u_n + \dots$$

est aussi convergente.

En effet désignons par S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la série proposée, c.à.d. la somme des termes jusqu'à u_n inclusivement. Puisque la série (1) est convergente, S_n est toujours inférieur à un certain nombre λ, quel que soit n. — La série (2) peut évidemment s'écrire

$$\varepsilon_0 S_0 + \varepsilon_1 (S_1 - S_0) + \varepsilon_2 (S_2 - S_1) + \dots + \varepsilon_n (S_n - S_{n-1}) + \dots$$

arrêtons-nous au terme $\varepsilon_n (S_n - S_{n-1})$. — on peut écrire cette somme ainsi

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) S_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) S_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) S_2 + \dots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) S_{n-1} + \varepsilon_n S_n$$

Tous les facteurs $\varepsilon_0 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, .. sont positifs, puisque $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ vont en décroissant. Donc, puisque ε_0 est la plus grande de ces quantités, on a

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) S_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) S_1 + \dots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) S_{n-1} + \varepsilon_n S_n < \varepsilon_0 \lambda$$

ou

$$\varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_n u_n < \varepsilon_0 \lambda$$

Cela démontre que la somme d'un nombre $(n+1)$ de termes de la série (2) est toujours inférieure à une quantité finie $\varepsilon_0 \lambda$, quel que soit n. — Donc la série (2) est convergente.

Quand on développe une fonction en série, la forme de développement la plus usitée est celle qui a lieu suivant les puissances ascendantes de la variable.

Théorème. Une fonction ne peut être développée que d'une seule manière suivant les puissances ascendantes de la variable.

Soit en effet

$$\varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + \cdots$$

Je suppose qu'on ait encore

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + \cdots$$

d'où

$$(1) \quad A + Bx + Cx^2 + \cdots = a + bx + cx^2 + \cdots$$

Cette équation doit avoir lieu pour toutes les valeurs de x. Or on peut l'écrire

$$A + x(B + Cx + \cdots) = a + x(b + cx + \cdots)$$

Puisque les séries sont convergentes, quand x tend vers zéro, les quantités entre parenthèses convergent vers des limites finies. Donc, à la limite, cette équation se réduit à $A = a$. — Il faut donc que A et a, qui sont fixes, soient égaux.

L'Eq. (1) revient donc à

$$Bx + Cx^2 + \cdots = bx + cx^2 + \cdots$$

Supprimant x, facteur commun, on retombe sur une équation de même forme que l'Eq. (1), d'où l'on conclut $B = b$. — et ainsi de suite. — Donc les deux développements sont identiques.

Il en serait de même si l'on supposait que le Développem.t au lieu d'être une série indéfinie, s'arrêtait à un terme d'ordre m en x, et que le Développem.t fût complété par un terme de la forme $x^m \varphi_1(x)$, $\varphi_1(x)$ convergeant vers zéro en même temps que x.

Supposons en effet qu'on ait

$$\varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + \cdots + Mx^m + x^m \pi(x)$$

et

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + Nx^m + x^m \pi_1(x)$$

d'où

$$A + Bx + Cx^2 + \cdots + Mx^m + x^m\pi(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + Nx^m + x^m\pi_1(x)$$

Le Raisonnem.t précédent s'applique à cette Equation, et l'on conclut, comme ci-dessus, $A = a$, $B = b$, .. jusqu'à $M = N$.

Théorème. — Si deux polynômes entiers et Rationnels par Rapport à x et de degré m en x sont rendus égaux par $m+1$ valeurs de x, les coefficients des mêmes puissances de x dans ces deux polynômes sont égaux.

En effet, si l'Equation

$$A + Bx + Cx^2 + \cdots + Px^m = a + bx + cx^2 + \cdots + px^m$$

est vérifiée pour $m+1$ valeurs de x, comme cette Equation n'admet que m Racines, il faut qu'elle ait lieu pour toute valeur de x, ce qui exige que l'on ait $A = a$, $B = b$, ..
Donc: Si deux polynômes entiers et Rationnels par Rapport à x . ... etc.

c q f d.

Théorème. — Si deux polynômes entiers et rationnels par rapport à x et à y, et du degré $\underline{m}$ en x et $\underline{n}$ en y sont tels que si, lorsqu'on y substitue successivement $n+1$ valeurs différentes de y, ils sont rendus égaux, pour chacune de ces valeurs de y, par $m+1$ valeurs différentes de x ; — les coefficients des puissances semblables de x et de y dans ces deux polynômes sont égaux.

En effet, d'après ce qui précède, les coefficients des puissances semblables de x sont égaux lorsqu'on y substitue une des $n+1$ valeurs différentes de y. Or, considérons dans ces deux polynômes les coefficients d'une même puissance de x. Ce sont des polynômes fonctions de y et du degré n au plus en y. Or ces polynômes sont rendus égaux par $n+1$ valeurs différentes de y. Donc les coefficients des mêmes puissances de y dans ces deux polynômes sont égaux. Donc les deux polynômes proposés sont identiques.

Il est évident que ce théorème peut être généralisé, et appliqué à deux polynômes entiers et rationnels par rapport à un nombre quelconque de variables.

Considérons maintenant un développement qui se présente quelquefois, et auquel nous allons faire subir une transformation qui peut être utile dans certaines questions.

Soit un produit de n facteurs, de la forme suivante :

(1) $(x+y)(x+y-1)(x+y-2)(x+y-3)\cdots(x+y-n+1)$

Nous allons le transformer en une somme de produits dont chaque facteur ne renfermera qu'une seule des variables x et y.

Le produit (1) est le numérateur de la fraction qui représente le nombre des combinaisons que l'on peut faire avec $x+y$ lettres prises n à n. Nous allons chercher une autre expression de ce nombre.

Supposons d'abord $x > n$, $y > n$. — Il est évident que les combinaisons que l'on peut faire avec $x+y$ lettres prises n à n peuvent se séparer en plusieurs groupes:

1°. les combinaisons de x lettres prises n à n;

2°. celles qu'on obtient en joignant chacune des combinaisons de x lettres $n-1$ à $n-1$ avec chacune des y autres lettres;

3°. celles qu'on obtient en joignant chacune des combinaisons de x lettres $n-2$ à $n-2$ avec chacune des combinaisons de y lettres 2 à 2.

etc.

$(n+1)°$: les combinaisons de y lettres prises n à n.

Or le nombre des combinaisons du premier groupe est

$$\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

Le nombre des combinaisons du 2°. groupe est

$$\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{y}{1}$$

Le nombre des combinaisons du 3°. groupe est

$$\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+3)}{1.2.3\cdots(n-2)}\cdot\frac{y(y-1)}{1.2}$$

et ainsi de suite.

Donc on a

$$\frac{(x+y)(x+y-1)\cdots(x+y-n+1)}{1.2.3\cdots n} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{1.2.3\cdots n}$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2)}{1.2.3\cdots(n-1)}\cdot\frac{y}{1}$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+3)}{1.2.3\cdots(n-2)}\cdot\frac{y(y-1)}{1.2}$$

$$+ \text{etc.}$$

$$+ \frac{y(y-1)(y-2)\cdots(y-n+1)}{1.2.3\cdots n}$$

d'où, en réduisant au même dénominateur, et le supprimant :

$$(x+y)(x+y-1)\cdots(x+y-n+1) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

$$+\frac{n}{1}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2)\,y$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}x(x-1)\cdots(x-n+3)\,y(y-1)$$

$$+\cdots$$

$$+y(y-1)(y-2)\cdots(y-n+1)$$

Les deux membres de cette équation sont des polynômes entiers et rationnels en x et y ; or ils sont rendus égaux par toutes les valeurs de x et de y supérieures à n, c.à.d. par un nombre infini de systèmes de valeurs de x et de y ; — Donc les deux membres de cette équation sont identiques.

Théorème. — Si l'on a deux séries

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$
$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \cdots$$

toutes deux convergentes, et ayant pour sommes S et S', si on les ajoute terme à terme, on formera une nouvelle série

$$(u_0+v_0) + (u_1+v_1) + \cdots + (u_n+v_n) + \cdots$$

aussi convergente, et dont la somme Σ sera égale à $S+S'$.

C'est évident de soi-même.

Théorème. — Si l'on a deux séries convergentes à termes positifs

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n + \cdots$$

$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n + \cdots$$

Si l'on forme la série suivante

$$(u_0 v_0) + (u_1 v_0 + u_0 v_1) + (u_2 v_0 + u_1 v_1 + u_0 v_2) + \cdots$$
$$+ (u_n v_0 + u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \cdots + u_2 v_{n-2} + u_1 v_{n-1} + u_0 v_n) + \cdots$$

cette troisième série, dont la loi de formation est facile à saisir, sera aussi convergente, et aura une somme Σ égale au produit SS' des sommes des deux autres.

Il est clair d'abord que, si l'on considère tous les termes de la troisième série, on verra que u_0 y est multiplié successivemt. par tous les termes de la série des v ; que u_1 l'est par tous ces termes moins le dernier v_n (je ne prends que les $n+1$ premiers termes de chaque série) ; que u_2 l'est par tous ces termes

moins les deux derniers v_{n-1} et v_n ; et ainsi de suite. Donc on a

$$\Sigma_n < S_n S'_n .$$

Soit maintenant $p = \frac{n}{2}$ ou $= \frac{n-1}{2}$ selon que n sera pair ou impair. Il est facile de voir que

$$\Sigma_n > S_p S'_p$$

car tous les termes du produit $S_p S'_p$ se trouvent dans Σ_n.

Maintenant, les deux produits $S_n S'_n$ et $S_p S'_p$ convergent indéfiniment vers la limite commune SS'. Donc on a bien aussi $\Sigma = S . S'$ c.q.f.d.

Problème ? — Quelle est, si elle existe, la fonction la plus générale qui jouisse de la propriété exprimée par l'équation

$$(1) \qquad \varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x+y) \quad ?$$

admettons l'Eq. (1), et cherchons à en déduire des propriétés de la fonction φ.

Faisons $y = x$. Il vient

$$\varphi(x)^2 = \varphi(2x)$$

Faisons $y = 2x$. J'aurai

$$\varphi(x) . \varphi(2x) \text{ ou } \varphi(x)^3 = \varphi(3x)$$

et ainsi de suite : donc en général

$$(2) \qquad \varphi(x)^m = \varphi(mx)$$

m étant entier et positif. — L'Equation (2) expri-

-me une propriété nécessaire de la fonction φ si celle-ci existe.

Cette Eq. (2) s'applique encore, même si m n'est ni entier ni positif.

En effet, remarquons d'abord qu'on aura

$$\varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \varphi(x)^{\frac{1}{n}}$$

Car, d'après cette Eq. (2), on aura

$$\varphi\left(n.\frac{x}{n}\right) \text{ ou } \varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)^{n} \quad \text{Or } \left[\varphi(x)^{\frac{1}{n}}\right]^{n} = \varphi(x).$$

Donc $\varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \varphi(x)^{\frac{1}{n}}$.

En combinant ces deux premiers résultats, on trouve

$$\varphi(px) = \varphi(x)^{p}$$

d'où

$$\varphi\left(\frac{p}{q}x\right) = \varphi(x)^{\frac{p}{q}}$$

Reste à examiner le cas où m serait négatif.

La première chose à faire pour cela, c'est d'examiner quelle est sur la fonction φ l'influence du changement de signe de x. Or si, dans l'Eq. (1)

$$(1) \qquad \varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y)$$

on fait $y = -x$, on trouve

$$\varphi(x).\varphi(-x) = \varphi(0)$$

D'ailleurs, pour $y = 0$, l'Eq. (1) donne

$$\varphi(x).\varphi(0) = \varphi(x)$$

donc

$$\varphi(0) = 1$$

et

$$(3) \qquad \varphi(x).\varphi(-x) = 1$$

Cela posé, je fais $m = -n$. alors j'aurai

$$\varphi(-nx) = \frac{1}{\varphi(nx)} = \frac{1}{\varphi(x)^n} = \varphi(x)^{-n}$$

Donc l'Eq. (2)

$$(2) \qquad \varphi(mx) = \varphi(x)^m$$

convient à des valeurs absolument quelconques de m.

Considérons cette dernière Equation. x et m y représentant des nombres quelconques, on aura nécessairement

$$\varphi(mx) = \varphi(xm)$$

d'où

$$\varphi(x)^m = \varphi(m)^x$$

Si nous supposons maintenant que m garde une valeur constante, nous tirerons de là

$$\varphi(x) = \left[\sqrt[m]{\varphi(m)}\right]^x$$

or, comme je puis assigner à m une valeur particulière quelconque, $m = 1$, par exemple,

$$\varphi(x) = \varphi(1)^x$$

$\varphi(1)$ est une certaine constante : donc enfin

$$\varphi(x) = a^x$$

Telle est la fonction la plus générale qui satisfait à l'Eq. (2).

Reste à savoir si elle satisfait aussi à l'Eq. (1), dont l'Eq. (2) pourrait bien n'être qu'un cas particulier. — or, quel que soit a, on a bien $a^x . a^y = a^{x+y}$.

ainsi, si l'on a une fonction $\varphi(x)$, et si l'on peut démontrer qu'elle jouit de la propriété que $\varphi(x)\cdot\varphi(y) = \varphi(x+y)$, on sera certain que $\varphi(x)=a^x$, et la constante a aura pour valeur $a = \varphi(1)$.

On peut chercher par des considérations semblables les fonctions qui satisfont à l'une des Equations

$$\varphi(x)\cdot\varphi(y) = \varphi(xy)$$

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y)$$

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(xy)$$

Passons maintenant aux applications de tous ces théorèmes préliminaires.

Cherchons le Développement de la puissance m d'un Binôme, pour un exposant m quel-conque.

On connaît la forme du Développem^t. si m est entier et positif.

Procédons comme Euler. — Prenons le même Développement prolongé indéfiniment

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1.2\cdots p}x^p + \cdots$$

et cherchons qu'elle est la fonction qu'il représente quand il est convergent.

Le Rapport d'un Terme au précédent est ici

$\frac{m-p}{p+1}x$, qui converge vers x lorsque p augmente indéfiniment. Donc la Série sera convergente toutes les fois que x sera compris entre -1 et $+1$.

Je me place dans ce cas, et je pose

$$\varphi(m) = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1.2\cdots p}x^p + \cdots$$

J'aurai de même

$$\varphi(n) = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1.2\cdots p}x^p + \cdots$$

avec ces deux Séries, j'en forme une troisième par le procédé de multiplication indiqué un peu plus haut. Le terme général de cette nouvelle Série sera

$$\left[\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1.2\cdots p} + \frac{m\cdots(m-p+2)}{1.2\cdots(p-1)}\cdot\frac{n}{1} + \frac{m\cdots(m-p+3)}{1.2\cdots(p-2)}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1.2\cdots p}\right]x^p$$

ou, d'après un théorème démontré

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\cdots\cdots(m+n-p+1)}{1.2\cdots p}x^p$$

Donc

$$\varphi(m)\cdot\varphi(n) = 1 + \frac{m+n}{1}x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}x^2 + \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

Donc aussi

$$\varphi(m)\cdot\varphi(n) = \varphi(m+n)$$

d'où

$$\varphi(m) = \varphi(1)^m$$

$$\varphi(m) = (1+x)^m$$

Donc, quel que soit m, et x restant compris entre -1 et $+1$,

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{(m)(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

On peut déduire de là très simplement le développement de $\mathcal{L}(1+x)$. — En effet, on a, quel que soit m,

$$\frac{(1+x)^m-1}{m} = \frac{x}{1} + \frac{m-1}{1.2}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

Si m tend vers zéro, le premier membre, on le sait, tend vers $\mathcal{L}(1+x)$. — Donc

$$\mathcal{L}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

développement convergent, comme celui qui lui a donné naissance, toutes les fois que x est compris entre -1 et $+1$.

Même à ces limites, il convient encore : car il donne $\mathcal{L}(0) = \infty$, ce qui est vrai ; — et, pour $\mathcal{L}(2)$, il fournit une valeur finie qui est la vraie évidemment : (si deux quantités sont toujours égales en s'approchant de leurs limites ...).

Le même procédé que nous venons d'employer pour trouver la formule du binôme peut conduire encore à d'autres résultats.

Par exemple, il peut donner le développement de e^x.

Proposons-nous la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^m}{1.2\ldots m}$$

qui est toujours convergente, et cherchons quelle fonction de x elle peut représenter pour m infini.

Posons

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^m}{1.2\ldots m} + \cdots$$

De même on aura

$$\varphi(y) = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \cdots + \frac{y^m}{1.2\ldots m} + \cdots$$

Formons une troisième série au moyen du procédé employé plus haut : elle sera

$$1 + \frac{x+y}{1} + \cdots + \left\{ \frac{x^m}{m!} + \frac{y}{1}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{y^2}{1.2}\frac{x^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots \right\}$$

ou

$$1 + \frac{x+y}{1} + \cdots + \frac{(x+y)^m}{1.2\ldots m} + \cdots$$

Donc

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x+y)$$

Donc

$$\varphi(x) = e^x$$

On a trouvé

$$\mathcal{L}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

pour x entre -1 et $+1$. — on a donc aussi

$$\mathcal{L}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

Retranchant :

$$\mathcal{L}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left\{ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \right\}$$

Série beaucoup plus favorable que la première au calcul des Logarithmes : elle peut donner les Logarithmes de tous les nombres. Car $\frac{1+x}{1-x}$ varie de 0 à ∞ quand

x varie de -1 à $+1$. Posons donc

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{y} = \frac{y+1}{y} \qquad x = \frac{1}{2y+1}$$

j'aurai y qcq. et la série sera très-convergente !

$$\mathcal{L}(y+1) - \mathcal{L}(y) = 2\left\{ \frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2y+1)^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2y+1)^5} + \dots \right\}$$

formule avec laquelle on peut calculer de proche en proche les Logarithmes népériens de tous les nombres.

ainsi on cherche d'abord $\mathcal{L}.2$

Puis $\mathcal{L}.3$.

Puis $\mathcal{L}.5$.

Puis $\mathcal{L}7$: car $\mathcal{L}7 - \mathcal{L}6$ est donné par la série.

Le $\mathcal{L}7$ a été calculé par Euler d'une manière particulière. La série donne $\mathcal{L}50 - \mathcal{L}49$ d'une manière très-rapide : or $\mathcal{L}50 - \mathcal{L}49 = \mathcal{L}2 + 2\mathcal{L}5 - 2\mathcal{L}7$. D'où $\mathcal{L}7$. C'est une vérification utile.

Les Logarithmes les plus pénibles à calculer sont les premiers, parce que les séries sont peu convergentes, et qu'on en a besoin avec beaucoup d'approximation pour les calculs ultérieurs. — Au reste, il y a d'autres procédés plus rapides.

On aura ainsi une table dans la base e. — Pour l'avoir dans la base 10, on multipliera tous les Logarithmes par $\frac{1}{\mathcal{L}10}$:

$$\frac{1}{\mathcal{L}10} = 0,434294248190\dots$$

Comment se fait-il que Neper ait pris justement pour base de ses Logarithmes un nombre inconnu e ? Il est facile de s'en rendre compte par la considération des deux progressions correspondantes qui ont conduit Neper aux Logarithmes.

On peut aussi éclaircir cela par quelques mots de Géométrie.



Supposons une ligne PM qui, toujours parallèle à l'axe des y, s'en éloigne d'un mouvement uniforme, pendant qu'un mobile M se meut dessus de telle façon que la hauteur MP croisse en progression géométrique quand AP augmente en progression arithmétique.

Pour lier ces deux progressions supposons que

pour $x = 0$	et pour $x = \alpha$
on ait $y = 1$	on ait $y = 1 + \beta$

β est qcq, les deux progressions sont déterminées. —

Neper a supposé $\beta = \alpha$; cela veut dire que la vitesse initiale ascendante de M en B est égale à la vitesse horizontale de la droite. — alors,

pour $x = n\alpha$ on aura $y = (1+\alpha)^n$

et la relation entre x et y s'obtiendra en éliminant n :

$$y = (1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}} = \left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x$$

Donc, si α est très petit, y est très voisin de la puissance x d'une quantité très voisine de e. — Si

Donc on suppose que α devient de plus en plus petit, on aura des progressions différentes : si l'on suppose que α tend vers zéro, la relation qui tend à s'établir entre deux termes correspondants des progressions limites sera $y = e^x$. Donc la table de Neper devait être sensiblement la même que celle qui aurait lieu dans la base e. Et voila pourquoi l'inventeur des Logarithmes, sans vouloir d'avance prendre une base déterminée, a pris un tel système que cette base se trouvât un nombre inconnu.

Digression
Sur quelques Expressions Singulières.

Les expressions Exponentielles et Logarithmiques donnent lieu à des expressions singulières qu'il est bon de connaître.

L'expression

$$a^x$$

si $a > 1$, croît indéfiniment avec x.

Donc

$$\frac{a^x}{x}$$

se présente alors sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. — Quelle est sa Limite ?

Puisque $a > 1$, on peut poser $a = 1 + b$. Donc $a^x = (1+b)^x$. — Supposons, et il est presque évident que cela est toujours permis, que x reçoive seulement des valeurs entières. on aura

$$(1+b)^x = 1 + xb + \frac{x(x-1)}{1.2} b^2 + \text{------}$$

ce qui prouve que $\frac{a^x}{x}$ croît indéfiniment avec x : et l'on voit que cette démonstration peut être donnée en Élémentaires.

Pour achever d'être rigoureux, il faut voir ce qui arrive si x n'est pas entier. — alors posons

$$\frac{a^x}{x} = \frac{a^{m+\delta}}{m+\delta}$$

S est fractionnaire, et m augmente indéfiniment. — Donc $\frac{a^x}{x}$ est compris entre $\frac{a^{m+1}}{m}$ et $\frac{a^m}{m+1}$, qui tous deux augmentent indéfiniment. Donc ... c.q.f.d.

Cherchons la limite de

$$\frac{Log\, x}{x} \quad \text{pour } x \text{ infini.}$$

Supposons la base $a > 1$: Si l'on pose $Log\, x = y$, on en tire $x = a^y$. Donc on a à chercher la limite de $\frac{y}{a^y}$, quand y augmente indéfiniment : car il est clair que cette limite $Log\, x$ croît indéf^t. en même temps que x. — Donc $\frac{Log\, x}{x}$ a pour limite zéro.

Si la base est plus petite que 1, on prend la réciproque de la base, et l'on a le même log. au signe près. Donc la limite est toujours zéro.

Il y a d'autres expressions qui se ramènent immédiatement aux précédentes. Par ex.

$$Lim\ x^{\frac{1}{x}} \quad si \quad x = \infty.$$

Car on a

$$Log. x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} Log\, x$$

dont la limite est nulle. Donc

$$Lim.\ x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Il y a une expression qui s'est présentée à Lagran.

-ge pour la première fois : c'est

$$\text{Lim.}\, x^x \quad \text{pour} \quad x = 0$$

Il avait conclu de la nature de ses calculs que cette limite était 1. — Posons $x = \frac{1}{y}$, y croît indéfinimt.

on a
$$x^x = \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{(y)^{\frac{1}{y}}}$$

dont la limite est bien l'unité.

Remarque. on fait quelquefois ces raisonnements remarquables :

$$a^0 = 1 \quad \text{d'où} \quad 0^0 = 1$$

ou encore :

$$0^a = 1 \quad \text{d'où} \quad 0^0 = 1$$

c'est absurde.

---

on peut chercher de même

$$\text{Lim}\,(\cos mx)^{\frac{1}{x}} \qquad \text{pour } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Lim}\,(\sin x)^x \\ \text{Lim}\,(\text{tg}\, x)^x\end{array}\right\} \text{pour } x = 0$$

Nous avons trouvé $\text{Lim}\ x^{\frac{1}{x}} = 1$ pour $x = \infty$.

cherchons maintenant

$$\text{Lim}\,(x^m)^{\frac{1}{x}} \qquad \text{p. } x = \infty$$

on a
$$\text{Lim}\,(x^m)^{\frac{1}{x}} = \text{Lim}\left[(x^m)^{\frac{1}{mx}}\right]^m = 1^m = 1$$

Cherchons aussi

$$\text{Lim}\left(Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots + U\right)^{\frac{1}{x}} \quad \text{pour } x = \infty$$

cette limite est la même que

$$\text{Lim}\left\{x^m\left(A + \frac{B}{x} + \cdots + \frac{U}{x^m}\right)\right\}^{\frac{1}{x}}$$

La parenthèse tend vers A. — Or $\text{Lim}\, A^{\frac{1}{x}} = 1$; donc la limite totale est 1.

On a vu que x^x tend vers 1 pour $x = 0$. Si, au lieu de x, on considère une quantité dont le rapport à x tend vers 1, comme $(\text{tg}\, x)^x$, $(\sin x)^x$, il est clair que la limite est aussi l'unité.

Cherchons $\text{Lim}\,(\cos x)^{\frac{m}{x}}$ pour $x = 0$.

Il suffit de chercher $\text{Lim}\,(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ car

$$\text{Lim}\,(\cos x)^{\frac{m}{x}} = \left[\text{Lim}\left\{(\cos x)^{\frac{1}{x}}\right\}\right]^m$$

Prenons les logarithmes, et commençons par trouver la limite de $\text{Log}\cos x \cdot \frac{1}{x}$, on a

$$\frac{\text{Log}\cos x}{x} = \frac{\frac{1}{2}\text{Log}(1 - \sin^2 x)}{x}.$$

or $\text{Log}(1 - \sin^2 x)$ est développable, car $\sin^2 x < 1$.

$$\text{Log}(1 - \sin^2 x) = -\sin^2 x - \frac{\sin^4 x}{2} - \frac{\sin^6 x}{3} - \cdots$$

série très-convergente. Divisant par x, on voit que la limite du quotient est nulle. Donc $(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ a pour limite 1, et aussi $(\cos x)^{\frac{m}{x}}$.

On a vu que, si x augmente indéfiniment, on a

$$\text{Lim}\ \frac{F(x)}{x} = \text{Lim}\left\{F(x+1) - F(x)\right\}$$

et

$$\text{Lim}\ F(x)^{\frac{1}{x}} = \text{Lim}\ \frac{F(x+1)}{F(x)}$$

appliquons cela à quelques uns des exemples déjà calculés :

$$\text{Lim}\ \frac{a^x}{x} = \text{Lim}\left\{a^{x+1} - a^x\right\} = \text{Lim}\left\{a^x(a-1)\right\} = \begin{cases} 0 & a<1 \\ \infty & a>1 \end{cases}$$

$$\text{Lim.}\ \frac{\text{Log}\,x}{x} = \text{Lim.}\ \text{Log}\ \frac{x+1}{x} = \text{Lim.}\ \text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\text{Lim}\left\{Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots\right\}^{\frac{1}{x}} = \text{Lim}\ \frac{A(x+1)^m + \cdots}{Ax^m + \cdots} = 1$$

Des Séries Récurrentes.

On appelle Séries Récurrentes celles que l'on obtient par l'opération de la simple division algébrique.

Supposons que l'on divise l'un par l'autre deux polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de x. — Si l'on divise deux ces deux polynômes, on a des Séries Infinies qui jouissent de propriétés simples et remarquables, et qui se retrouvent souvent dans des Séries obtenues autrement.

Le cas le plus simple est celui où le diviseur est du premier degré. alors le numérateur (qu'on suppose toujours de degré inférieur au dénominateur), est nécessairement du degré zéro. — C'est donc un nombre. J'aurai alors, en supposant, comme on peut toujours le faire, que le premier terme du dénominateur est 1 :

$$\frac{\alpha}{1-ax} = \alpha\,\frac{1}{1-ax} = \alpha\left(1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\cdots+a^nx^n+\frac{a^{n+1}x^{n+1}}{1-ax}\right)$$

C'est la Série des termes de la progression Géométrique dont le premier terme est 1 et la raison ax.

Pour qu'il y ait série convergente, il faut que $ax<1$. alors seulement on est en droit d'écrire

$$\frac{\alpha}{1-ax} = \alpha\left(1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\cdots\cdots\right)$$

Cas où le Diviseur est du Second degré.

Soit
$$\frac{\alpha + \beta x}{1 - ax - bx^2}$$

Effectuons

$$\begin{array}{l|l} \alpha + \beta \,\big|\, x & 1 - ax - bx^2 \\ \quad - a\alpha & \\ \quad\quad - b\alpha x^2 & \alpha + (\beta + a\alpha)x + Kx^2 + \cdots \\ \quad\quad - \text{etc.} & \quad + Hx^h + \dfrac{Gx^{h+1} + Lx^{h+2}}{1 - ax - bx^2} \end{array}$$

ainsi le quotient sera complété, à partir d'un exposant h qcq. par x^h multipliant une fonction de x qui devient nulle avec x :

$$R = x^h f(x)$$

Il suit évidemment de là qu'il n'y a qu'un seul développement possible.

Si l'on voulait déterminer la loi des divers termes au moyen de la division, ce serait fort pénible. Mais la loi de leur déduction et l'expression du terme général sont faciles à trouver.

Je sais que le quotient est de la forme

$$A + Bx + Cx^2 + \cdots + Mx^{n-1} + Nx^n + Px^{n+1} + \cdots + Hx^h$$

Comment avoir les coefficients ?

Si je multiplie ce quotient par $1 - ax - bx^2$, le produit sera $\alpha + \beta x$. (Je ne m'occupe pas du

terme complémentaire, quitte à chercher plus tard les conditions de convergence). — Multipliant, j'obtiens

$$A + (B - A\alpha)x + (C - Ba - Ab)x^2 + \cdots + (P - Na - Mb)x^{n+1} + \cdots$$

Tout cela, en y joignant le terme complémentaire R, forme $\alpha + \beta x$, et cela, identiquement. Donc

$$A = \alpha$$

$$B - A\alpha = \beta$$

et les autres coefficients sont nuls :

$$C = Ba - Ab$$

et en général

$$P = Na + Mb$$

Voilà la relation générale au moyen de laquelle un coefficient se déduit des deux précédents. C'est pour cela que la série est dite récurrente. Et les coefficients a et b forment l'échelle de relation des coefficients de la série : $+ax + bx^2$, l'échelle de relation des termes eux-mêmes.

Cette loi très simple permet de former successivement les coefficients.

Il serait facile d'étendre cela à un diviseur d'un degré qcq.

La remarque faite plus haut qu'il n'y a qu'un développement possible va nous conduire à la détermination du terme général. Ce terme général est une fonction de x et de n qui doit être telle que, n recevant les valeurs convenables, cette fonction donne

les valeurs de tous les coefficients.

Ramenons la recherche de ce terme général à celle de termes généraux dans des développements où le diviseur est du premier degré. — Pour cela, il suffit de décomposer la fraction en fractions simples. — Soient p et q les racines du trinôme égalé à zéro. on trouvera

$$\frac{\alpha+\beta x}{\left(1-\frac{x}{p}\right)\left(1-\frac{x}{q}\right)} = \frac{A}{1-\frac{x}{p}} + \frac{B}{1-\frac{x}{q}}$$

et

$$\begin{cases} A = \dfrac{\alpha+\beta p}{1-\frac{p}{q}} \\ B = \dfrac{\alpha+\beta q}{1-\frac{q}{p}} \end{cases}$$

Mais je laisse A et B pour plus de simplicité. Je fais séparément les deux développements, ce qui donne

$$A\left\{1+\frac{x}{p}+\cdots+\frac{x^n}{p^n}+\cdots\right\} + B\left\{1+\frac{x}{q}+\cdots+\frac{x^n}{q^n}+\cdots\right\}$$

Le terme général sera donc

$$\left(\frac{A}{p^n}+\frac{B}{q^n}\right)x^n$$

A et B me sont donnés. Je puis donc former ce coefficient.

Maintenant, il faut faire les substitutions. — On a.

-rive, en remarquant que

$$p+q = -\frac{a}{b} \qquad pq = -\frac{1}{b}$$

à cette expression du terme général

$$(-b)^n \left\{ \frac{\alpha\,(q^{n+1}-p^{n+1}) - \frac{\beta}{b}(q^n - p^n)}{q-p} \right\} x^n$$

où q et p sont les racines. — on pourrait effec-tuer la division par $q-p$. Donc, si $p=q$, le coefficient ne devient pas $\frac{0}{0}$. Dans ce cas, on aurait

$$(-b)^n \left\{ \alpha(n+1)p^n - \frac{\beta}{b}(n\,p^{n-1}) \right\} x^n$$

Il y aurait encore à examiner le cas où p et q sont imaginaires. — on transforme alors le coefficient de x^n en posant

$$p = \rho \{ \cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi \}$$

$$q = \rho \{ \cos\varphi - \sqrt{-1}\,\sin\varphi \}$$

le calcul n'offre pas de difficulté.

Occupons-nous de la convergence.

On a vu que

$$\frac{\alpha+\beta x}{1-ax-bx^2} = \frac{\alpha+\beta x}{\left(1-\frac{x}{p}\right)\left(1-\frac{x}{q}\right)} = \frac{A}{1-\frac{x}{p}} + \frac{B}{1-\frac{x}{q}}$$

Pour la convergence, il faut que $x < p$ et $x < q$, que x en un mot soit, en valeur absolue, inférieur à la plus petite des deux racines : — Et cela suffit évid^t.

Dans le cas où p et q sont imaginaires, on a

$$p^n = \rho^n \{ \cos n\theta + \sqrt{-1} \sin n\theta \}$$

Donc le terme général $\frac{x^n}{p^n}$ d'une des Séries partielles devient

$$\frac{x^n}{\rho^n} \{ \cos n\theta - \sqrt{-1} \sin n\theta \}$$

Donc cette Série se partage en deux autres, qui devront être toutes les deux convergentes. — La première dont le terme Général est $\frac{x^n}{\rho^n} \cos n\theta$ le sera, si la Série dont le terme général est $\frac{x^n}{\rho^n}$ l'est elle-même. Si donc $\frac{x}{\rho} < 1$, tout il y aura convergence générale.

Si $x > \rho$, la Série sans les cosinus sera divergente. Et alors, il est impossible que les deux Séries en Sinus et Cosinus soient à la fois convergentes. Car $\cos^2 + \sin^2 = 1$: la Somme des carrés des termes Généraux, $\frac{x^n}{\rho^n}$, croîtrait donc indéfiniment. Donc les deux Séries ne peuvent être convergentes. — Et il en est de même si $x = \rho$. — Donc x doit être plus petit que le module des Racines Imaginaires.

Etudions encore quelques propriétés des Séries Récurrentes.

Théorème. Si l'on ajoute terme à terme un nombre qcq. de Progressions Géométriques, on aura une Série Ré-

-currente dont l'échelle de relation a le même nombre de ter-
-mes que l'on a ajouté de progressions.

Faisons le calcul sur deux progressions

$$a : aq : aq^2 : \dots : aq^n : \dots$$

$$b : br : br^2 : \dots : br^n : \dots$$

D'où

$$a+b \ , \ aq+br \ , \ aq^2+br^2 , \dots , aq^n+br^n , \dots$$

Je dis que la série est récurrente et que son échelle de relation a deux termes. — Je prends en effet trois termes consécutifs

$$\left.\begin{array}{ll} aq^{n-1}+br^{n-1} & = M \\ aq^n+br^n & = N \\ aq^{n+1}+br^{n+1} & = P \end{array}\right\}$$

Il faut pouvoir éliminer n entre ces trois Eq. pour avoir entre M, N, P une relation indépendante de n. — Or j'ai trois Eq. Mais n entre en exposant, de façon qu'il faut éliminer q^n et r^n : sans cela deux Eq. suffiraient. — q^n et r^n entrent au premier degré : si donc on les tire des deux premières Eq., M et N entreront linéairement aux numérateurs : si on les remet dans la troisième, on obtiendra une relation linéaire entre M, N, P. Donc la série est récurrente, P se formant au moyen des deux termes qui précèdent, et l'échelle de relation a deux termes
c.q.f.d.

Il est bon d'achever le calcul. — on trouve l'Eq.

$$P = (q+r)N - qrM$$

qu'on obtient en multipliant l'Eq. intermédiaire par $q+r$ et tenant compte des autres.

Réciproquement, une Série Récurrente peut toujours être considérée comme la somme d'un certain nombre de progressions ajoutées terme à terme.

Soit la série Récurrente

$$A + B + C + D + \dots + M + N + P + \text{—}$$

et je suppose que l'Echelle de Relation ait deux termes par exemple. — Cherchons cette échelle de Relation :

$$\begin{cases} C = B\alpha + A\beta \\ D = C\alpha + B\beta \end{cases}$$

d'où α et β. — Supposons α et β connus. Je prends deux progressions Géométriques où tout soit inconnu :

$$a \quad aq \quad aq^2 \dots\dots$$

$$b \quad br \quad br^2 \dots$$

a, b, q, r sont quatre indéterminées. Je sais qu'en les ajoutant, j'aurai une Série Récurrente dont l'Echelle de Relation aura deux termes. — Il faut que les deux Séries récurrentes puissent devenir identiques. Mais dans la dernière, l'échelle de Relation est $q+r$ et $-qr$. Donc on posera

$$q+r = \alpha$$

$$-qr = \beta$$

Donc déjà q et r devront satisfaire à l'Eq.

$$q^2 - \alpha q - \beta = 0$$

dont les deux Racines seront q et r. — De plus, il faut que les deux premiers termes des deux séries soient les mêmes. Et cela suffit pour achever l'identification. Donc

$$\begin{cases} a + b = A \\ aq + br = B \end{cases}$$

encore deux Eq. qui déterminent a et b. — Donc ...
C.q.f.d.

Déterminons maintenant la somme d'un nombre qcq. de termes faisant partie d'une Série Récurrente, indéfinie ou non. — Cherchons la somme des termes jusqu'à P

$$A + B + C + D + \text{———} + M + N + P$$

Supposons deux termes par ex. à l'échelle de Relation

$$P = Na + Mb$$

J'écris toutes les Eq. qui expriment que la Série est Récurrente :

$$\begin{cases} C = Ba + Ab \\ D = Ca + Bb \\ \dots\dots \\ P = Na + Mb \end{cases}$$

et j'ajoute :

$$S - A - B = a(S - A - P) + b(S - N - P)$$

Eq. du 1er degré en S ; d'où

$$S = \frac{A+B-(A+P)a-(N+P)b}{1-a-b}$$

Si la série est indéfinie et convergente, N et P tendent vers zéro : et

$$\lim S = \frac{A(1-a)+B}{1-a-b}$$

Application à des suites trigonométriques.

Sommes de sinus ou de cosinus d'arcs en progression par différence.

$$S = \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+2x) + \cdots + \cos(a+mx)$$

Ces cosinus forment une série récurrente. — car je prends

$$\cos\{a+(n-1)x\} + \cos(a+nx) + \cos\{a+(n+1)x\}$$

on connait la formule

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)$$

en l'appliquant aux deux termes extrêmes, on trouve qu'ils donnent pour somme

$$2\cos(a+nx)\cos x$$

d'où

$$\cos\{a+(n+1)x\} = \cos(a+nx).2\cos x - \cos\{a+(n-1)x\}$$

c q f d. car l'échelle de relation est $2\cos x$ et -1.

En appliquant maintenant la formule précédente, on trouve, toutes réductions et transformations en produit étant effectuées,

$$S = \frac{\sin\{a+(m+\frac{1}{2})x\} - \sin\{a-\frac{1}{2}x\}}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

ce qui se ramène encore à la forme

$$S = \frac{\sin \frac{m+1}{2}x \cos\left(a + \frac{m}{2}x\right)}{\sin \frac{1}{2}x}$$

formule très utile.

Remarquons que ces arcs a, $a+x$, $a+2x$ ... correspondent sur la circonf. à des points équidistants. Dans le cas particulier où la circ. a été partagée en un certain nombre de parties égales, on a par exemple $(m+1)x = 2\pi$ ou $\frac{m+1}{2}x = \pi$: la somme S des cosinus est nulle : car $\sin \frac{m+1}{2}x = \sin \pi = 0$. — Elle serait nulle aussi si $\cos\left(a + \frac{m}{2}x\right) = 0$, c.à.d. si $a + \frac{m}{2}x$ était égal à un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. Ces théorèmes du reste sont connus.

On trouvera de même que

$$S_1 = \sin a + \sin(a+x) + \sin(a+2x) + \dots + \sin(a+mx)$$

a pour valeur

$$S_1 = \frac{\cos\left(a - \frac{1}{2}x\right) - \cos\left\{a + \left(m + \frac{1}{2}\right)x\right\}}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

ou

$$S_1 = \frac{\sin \frac{m+1}{2}x \sin\left(a + \frac{m}{2}x\right)}{\sin \frac{1}{2}x}$$

et l'on reconnaît que cette somme est nulle dans le premier des cas précédents, et si $a + \frac{m}{2}x$ est un multiple pair de $\frac{\pi}{2}$.

Théorème : Si l'on partage la circonférence en parties égales, et qu'on prenne pour origine des arcs un point qcq.

qui ne soit pas un point de division, la somme des sinus et celle des cosinus de ces arcs est nulle.

Les formules précédentes vont nous conduire à des sommations de carrés de sinus et de cosinus. — On sait en effet que

$$1 + \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi$$

$$1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi$$

Donc

$$\sin^2 a + \sin^2(a+x) + \sin^2(a+2x) + \dots + \sin^2(a+mx) = \begin{cases} \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \dots + \quad \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\cos 2a - \frac{1}{2}\cos(2a+2x) - \dots - \frac{1}{2}\cos(2a+2mx) \end{cases}$$

$$= \frac{m+1}{2} - \frac{1}{2}\left\{\cos 2a + \cos(2a+2x) + \dots + \cos(2a+2mx)\right\}$$

Si l'on achève le calcul, on trouve

$$\sum_{h=0}^{h=m}\left(\sin^2\{2a+2hx\}\right) = \frac{m+1}{2} - \frac{\sin(m+1)x \cdot \cos(2a+mx)}{2\sin x}$$

De même

$$\sum_{h=0}^{h=m}\left(\cos^2\{2a+2hx\}\right) = \frac{m+1}{2} + \frac{\sin(m+1)x\,\cos(2a+mx)}{2\sin x}$$

les deux derniers termes sont égaux au signe près, comme on le voit à priori.

Si $(m+1)x = \dot{\pi}$, alors $\Sigma(\sin^2) = \Sigma(\cos^2) = \frac{m+1}{2}$.

Enfin voici une dernière formule un peu moins utile :

$$s = \sin\alpha \sin\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta + \dots + \sin m\alpha \sin m\beta$$

on sait que $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b$

on peut donc calculer s. — on trouve

$$s = \frac{\sin.(m+\frac{1}{2})(\beta-\alpha)}{2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}} - \frac{\sin.(m+\frac{1}{2})(\beta+\alpha)}{2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}}$$

et l'on trouverait facilement aussi la somme pareille en cosinus.

Sur le Développement des Fonctions en Séries.

La méthode générale qui a pour objet le développement des fonctions en séries est fondée sur la considération élémentaire des fonctions dérivées, et son esprit consiste à ramener le développement en série d'une fonction au développement en série de la dérivée de cette fonction.

Rappelons qq. propriétés des dérivées.

Soit $F(x)$ une fonction, $F'(x)$ sa dérivée. on a

$$F(x+h) - F(x) = h\{F'(x) + \alpha\}$$

pour une autre fonction φ :

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\{\varphi'(x) + \alpha'\}$$

donc la différence des accroissements est

$$\Delta F - \Delta\varphi = h\{F' - \varphi' + \alpha - \alpha'\}$$

donc la fonction qui croît le plus rapidement est celle dont la dérivée est la plus grande.

Développement d'une fonction, quand on connaît le développement de la dérivée.

Soit $\quad \varphi'(x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + R_n$

R_n tend vers zéro à mesure que n augmente. — on remplace chaque terme (u) par la fonction dont il est la dérivée, et R_n par la plus grande valeur que puisse avoir $\int R_n dx$, c.à.d. Nx, si N est le maximum de R_n. — on a alors

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + N.x$$

La dérivée de cette expression est plus grande que

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + R_n$$

ou que la dérivée de $\varphi(x)$. Donc, si cette fonction est égale à $\varphi(x)$ pour $x=0$, elle reçoit ensuite un accroissement plus grand quand x augmente : donc elle est constamment plus grande que $\varphi(x)$ au-delà de $x=0$.

Si N' est la plus petite valeur de R_n, on verra de même que

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + N'x$$

est plus petit toujours que $\varphi(x)$.

On peut même ajouter des constantes C et C_1 en intégrant par rapport à x, et les déterminer de façon que, pour $x=0$, ces deux suites aient la même valeur.

Si Nx et $N'x$ tendent vers 0, la fonction $\varphi(x)$ sera égale à $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$

D'ailleurs C et C_1 sont les mêmes nombres, puisque, pour $x=0$, on a la même valeur de $\varphi(x)$.

Application à quelques exemples. — Soit

$$\varphi(x) = \text{Log}(1+x)$$

on a

$$\varphi'(x) = \frac{\text{Log}\, e}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \pm x^n + R_n$$

$$\varphi(x) = \text{L}(1+x) = \text{Log}\, e\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \pm \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + C$$

Soit

$$\varphi(x) = \text{arc tang}\, x$$

on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \pm x^{2n}$$

$$\varphi(x) = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \pm \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

on détermine C de manière que, pour $x = 0$, la fonction et le développement aient la même valeur. — En prenant l'origine des arcs de manière que l'arc soit nul en même temps que la tangente, on a $C = 0$. Donc

$$\text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \pm \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

D'où

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

valeur découverte par Leibnitz.

Soit

$$\varphi(x) = \text{arc sin}\, x.$$

on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\varphi'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}x^4 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}x^6 + \dots + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{1.2.3\dots n}x^{2n} + \dots$$

d'où

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{1.2.3\dots n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

ou encore

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

série encore convergente pour $x = 1$.

Développement de Sin x et Cos x en fonction de x.

On connaît les formules

$$\begin{cases} \cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2} x \sin^2 x + \cdots \\ \sin mx = m\cos^{m-1} x \sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3} x \sin^3 x + \cdots \end{cases}$$

pour m entier et positif, auquel cas ces deux développements s'arrêtent toujours.

Si nous posons $mx = z$, d'où $m = \frac{z}{x}$, dans le cas où $\frac{z}{x}$ est entier et positif

$$\cos z = \cos^{\frac{z}{x}} x \left\{ 1 - \frac{\frac{z}{x}\left(\frac{z}{x}-1\right)}{1.2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{\frac{z}{x}\left(\frac{z}{x}-1\right)\left(\frac{z}{x}-2\right)\left(\frac{z}{x}-3\right)}{1.2.3.4}\operatorname{tg}^4 x \ldots \right\}$$

Dans ce second membre, on peut prendre telle partie aliquote de z que l'on voudra, et toujours le second membre sera identiquement égal à Cos z.

Supposons que le sous-multiple x tende vers 0. La limite vers laquelle il tendra en apparence, devra ~~être~~ le second membre, qui ne varie réellement pas, devra être identiquement égale à Cos z. — On peut écrire :

$$\cos z = \cos^{\frac{z}{x}} x \left\{ 1 - \frac{z(z-x)}{1.2}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2 + \frac{z(z-x)(z-2x)(z-3x)}{1.2.3.4}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^4 + \ldots \right\}$$

Cette suite n'est pas une série, mais ces termes fi-

-nissent par être toujours au-dessous de ceux d'une série convergente. — Le rapport d'un terme au précédent est en effet

$$\frac{\{z-(n-1)x\}(z-nx)}{n(n+1)}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2$$

et les deux facteurs du numérateur sont toujours positifs. Donc ce rapport est moindre que

$$\frac{z^2}{n(n+1)}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2$$

et, si n augmente et x diminue, le rapport $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ devient de plus en plus voisin de 1, et par suite cette expression devient moindre que 1 ; donc la suite des termes considérés reste au-dessous de ceux d'une progression géométrique décroissante. — Alors, si l'on prend les limites de la parenthèse, et du facteur qui est en dehors, et qu'on les multiplie, on a $\cos z$, puisque ce produit ne change pas. — Pour avoir la limite de la parenthèse, nous prenons celle de chaque terme, et nous pourrons alors reconnaître quelle est celle de la somme de ces termes. Or $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ a pour limite 1 dans chaque terme quand x tend vers zéro, et l'autre ~~appro~~ facteur approche d'une puissance de z ; car le coefficient de x étant un nombre fixe, qui peut être très-grand, mais qui est fixe : donc la parenthèse a pour limite $1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\dots$. Et, comme cette somme diffère de la parenthèse d'aussi peu qu'on veut, on peut prendre cette somme pour la limite cherchée.

Cherchons maintenant $\lim \cos^{\frac{z}{x}} x = \lim \left\{ (\cos^2 x)^{\frac{1}{x}} \right\}^{2z}$.

$$(\cos^2 x)^{\frac{1}{x}} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} \sin^2 x + \frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{1.2} \sin^4 x - \dots$$

Cette série est convergente, car $\sin^2 x < 1$! — Le second membre a évidemment pour limite 1. Donc aussi $(\cos^2 x)^{\frac{1}{x}}$ et par suite $\cos^{\frac{z}{x}} x$.

Donc

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

Les cosinus, comme toutes les lignes trigonométriques, sont des rapports au rayon toutes les fois que l'on ne fait pas de calculs par logarithmes. Dans le cas actuel, on a supposé que le rayon a été pris pour unité :

On arrivera par des raisonnements semblables à

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

On voit que le sinus n'a que des puissances impaires, en sorte que $\sin z$ change de signe en même temps que l'arc. Nous savons en effet que, pour la généralité des formules sur lesquelles nous nous sommes appuyés pour arriver à la formule de Moivre, il fallait que le sinus changeât de signe quand l'arc en changeait. Il n'est donc pas étonnant qu'on arrive, par la suite des calculs, à des formules qui jouissent de la même propriété.

Détermination de π.

On a trouvé

$$\text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

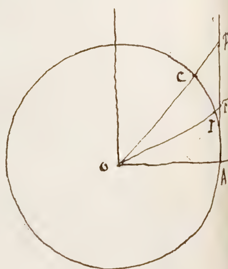
qui est convergente pour x compris entre -1 et $+1$.

Le rayon est 1. — Pour $x = 1$, on a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Mais cette série est trop peu convergente.

On a pensé à choisir deux arcs dont les tangentes fussent rationnelles.



On a pris $x = \frac{1}{2}$, et l'on a calculé l'arc AI correspondant, or, par tes et il reste à calculer IC. Or, par les tangentes, on a

$$\text{tg}\, CI = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Si l'on fait $x = \frac{1}{3}$ dans la formule arc tg x, on aura l'arc IC. En faisant la somme, on a $\frac{\pi}{4}$.

$$AI = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 \quad \text{erreur} < \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{4608}$$

$$CI = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right\} + \frac{1}{5}\left\{\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right\} - \cdots$$

Autre Méthode. Prenons d'abord l'arc AM dont la tangente est $\frac{1}{5}$. Cet arc α est

$$a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \cdots$$

et l'on calcule a avec une approximation suffisante.

on trouve ensuite que $\operatorname{Tg} 2a = \frac{5}{12}$ et $\operatorname{Tg} 4a = 1 + \frac{1}{119}$.

Donc l'arc $4a > AB$: et cet arc $4a$ est connu avec l'approximation voulue. on aura donc facilement la tangente du petit arc BP, tel que $4a - b = \frac{\pi}{4}$.

$$\operatorname{Tg} b = \frac{\operatorname{Tg} 4a - 1}{1 + \operatorname{Tg} 4a} = \frac{\frac{1}{119}}{2 + \frac{1}{119}} = \frac{1}{239}$$

Donc arc tg x donnera la valeur de l'arc b par un très-petit nombre de termes ; la série étant très-convergente.

Exponentielles Imaginaires.

On a trouvé

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots \\ \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots \\ e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots \end{cases}$$

On voit que, dans $\cos x$, quand l'exposant est impairement pair, le signe est $-$, et il est $+$ si l'exposant est ~~simp~~ doublement pair. — Dans le sinus, c'est pour les exposants 1, 5, 9, 13, ... que l'exposant est $+$. le signe $-$ est pour les exposants 3, 7, 11 ... On peut représenter cela par des puissances de $\sqrt{-1}$, qui sont $\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$, $+1$. Il est facile d'après cela de voir que si, dans e, on met pour x le terme $x\sqrt{-1}$, on retrouve, par les termes de degré pair, tous ceux de $\cos x$; et, par ceux de degré impair, tous ceux de $\sin x$, à part le facteur $\sqrt{-1}$. Donc, si l'on remplace x par $x\sqrt{-1}$, on peut dire que le développement de $e^{x\sqrt{-1}}$ est la même chose que $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$. Nous convenons alors de noter par le symbole $e^{x\sqrt{-1}}$ le développement de e^x où l'on a remplacé x par $x\sqrt{-1}$,

et alors on peut écrire :

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x$$

Si l'on avait mis $-x\sqrt{-1}$, on aurait trouvé de même

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,\sin x$$

avec une convention semblable : de façon qu'on a identiquement

$$e^{\pm x\sqrt{-1}} = \cos x \pm \sqrt{-1}\,\sin x$$

C'est ce que Lagrange appelle la plus belle découverte de Jean Bernoulli.

Semblablement, nous entendrons qu'on appelle $\cos(z\sqrt{-1})$ le développement de $\cos x$ dans lequel on mettrait pour x l'expression $z\sqrt{-1}$: ce qui permet d'écrire identiquement :

$$\left\{\begin{aligned} \cos(z\sqrt{-1}) &= 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \cdots \\ \sin(z\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\left(z + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots\right) \end{aligned}\right.$$

Il faut savoir à quelle condition on peut introduire dans le calcul ces expressions imaginaires. Il faut voir si l'on aura encore les mêmes règles à suivre pour le calcul des exposants, pour que les opérations et équations soient exactes, aux mêmes conditions que celles qu'on s'est imposé d'abord.

Prenons

$$\left\{\begin{aligned} e^{x\sqrt{-1}} &= \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x \\ e^{y\sqrt{-1}} &= \cos y + \sqrt{-1}\,\sin y \end{aligned}\right.$$

Pour faire le produit des exponentielles, nous enten-

-dons qu'on fait la multiplication des deux séries qu'elles représentent, et il en résulte une partie réelle et une partie imaginaire qu'on sait être égale à

$$\cos(x+y) + \sqrt{-1}\,\sin(x+y)$$

or cela donne une série qu'on est convenu d'écrire $e^{(x+y)\sqrt{-1}}$. donc on peut dire que

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}}$$

représente le produit des deux exponentielles, et l'on voit qu'il s'obtient en ajoutant les exposants.

On verra de même que $\left(e^{x\sqrt{-1}}\right)^m$ doit, dans le même système de notations, s'écrire $e^{mx\sqrt{-1}}$.

Théorème. — Si l'on a deux expressions identiques, et qu'on y substitue à une certaine lettre une même expression, on aura deux résultats identiques.

Cela est évident quand le nombre des termes est fini. Mais, pour une série, il faut qu'elle soit convergente pour qu'on puisse en tirer quelque parti : et, si elle contient des imaginaires, il faudra qu'elle soit convergente pour les termes réels et pour les termes imaginaires. — Or si l'on introduit cette expression : $\sqrt{-1}$, cela peut changer certains signes ; il faut donc, pour qu'on puisse faire la substitution, que le changement de signe des termes ne puisse jamais détruire la convergence : sans cela, on s'exposerait à arriver à des résultats absurdes.

Cela étant, considérons les deux expressions $e^{x\sqrt{-1}}$ et $e^{y\sqrt{-1}}$, qui représentent des séries. — on sait que $e^x e^y = e^{x+y}$ quels que soient x et y réels. on a donc identiquement :

$$\left(1+x+\frac{x^2}{1.2}+\cdots\right)\left(1+y+\frac{y^2}{1.2}+\cdots\right) = 1+\frac{x+y}{1}+\frac{(x+y)^2}{1.2}+\cdots$$

et cela, quels que soient les signes, car e^x donne une série qui reste convergente quand on y change les signes d'une manière qcq.

or si je mets pour y l'exposant $y\sqrt{-1}$, le premier membre s'écrit, comme on en est convenu, $e^x e^{y\sqrt{-1}}$: et le second membre devient le développement e^{x+y} quand on y change y en $y\sqrt{-1}$, ce que l'on est convenu de noter $e^{x+y\sqrt{-1}}$. on doit écrire par conséquent $e^x e^{y\sqrt{-1}} = e^{x+y\sqrt{-1}}$ dans notre système de notations. — Il suffit donc encore d'ajouter les exposants pour faire le produit des exponentielles.

D'ailleurs, les exposants peuvent être précédés du signe —. car on n'a fait aucune hypothèse à ce sujet : donc les expos règles sont toutes les mêmes que pour les exposants entiers réels. — Cela s'étend du reste facilement aux élévations à des puissances et aux extractions de racines.

on a donc

$$\begin{cases} e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x \\ e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,\sin x \end{cases}$$

Ainsi l'on aura

$$\left\{\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}\right.$$

Problème. Trouver

$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \dots + \cos(a+mb)$$

Cette somme peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\left\{\left(e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}\right) + \left(e^{(a+b)\sqrt{-1}} + e^{-(a+b)\sqrt{-1}}\right) + \dots + \left(e^{(a+mb)\sqrt{-1}} + e^{-(a+mb)\sqrt{-1}}\right)\right\}$$

les premiers termes sont en progression géométrique, et il en est de même des seconds. On peut donc faire ces deux sommes séparément, en traitant toujours les exponentielles comme on l'a fait jusqu'ici, pour qu'on soit sûr d'arriver au même résultat que si l'on avait mis tout d'abord les séries qui sont représentées par des exponentielles imaginaires.

Si, dans les identités qui précèdent, on change x en $x\sqrt{-1}$, ce qui est permis : car les séries qui répondent à ces symboles sont toujours convergentes quels que soient les signes ; on aura les nouvelles identités :

$$\begin{cases} \cos(x\sqrt{-1}) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} \\[2ex] \sin(x\sqrt{-1}) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\sqrt{-1} \end{cases}$$

en entendant qu'on a des résultats identiques en mettant $x\sqrt{-1}$ pour x dans les séries que les exponentielles ou les sinus et cosinus représentent.

Convenons de donner aux exposants imaginaires le nom de Logarithmes, comme s'ils étaient réels. D'après ce qu'on vient de voir, les règles sur ces Logarithmes sont les mêmes en effet que s'ils étaient réels, puisque, pour les exponentielles, elles sont identiques.

Ainsi, puisque $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$, on dira que $x\sqrt{-1}$ est le Logarithme imaginaire de $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$: ou bien

$$L(\cos x + \sqrt{-1}\sin x) = x\sqrt{-1}$$

$$L(\cos x - \sqrt{-1}\sin x) = -x\sqrt{-1}$$

D'après cela, on pourra avoir $L(a+b\sqrt{-1})$. Car $a+b\sqrt{-1} = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$, et, comme on traite les Logarithmes de la même manière que s'ils étaient réels, on aura les formules suivantes :

$$\begin{cases} L(a+b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\, L(a^2+b^2) + (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1} \\ L(a-b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\, L(a^2+b^2) - (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1} \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de Logarithmes : – et cela est vrai pour les nombres Réels, car il suffit pour ce cas que $b = 0$. – Si $a > 0$, φ doit être nul. Donc

$$La = L(a) \pm 2n\pi\sqrt{-1}$$

$L(a)$ étant le Logarithme arithmétique. – Si $a < 0$, $\cos\varphi < 0$, donc $\varphi = \pi$, ou π plus un multiple de la circonférence. Donc

$$L(-2) = L(2) \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}$$

$L(2)$ étant encore le Logarithme arithmétique. On voit que $L(-2)$ ne peut pas être Réel, car, k étant entier, $2k+1$ ne peut pas être nul.

On a

$$L.a^2 = La + La = 2La$$

et

$$L.(-a)^2 = 2\,L.(-a)$$

on devrait Retrouver les mêmes valeurs. C'est en effet ce qui arrive : car on a deux expressions qui donnent chacune une infinité de valeurs pour les Logarithmes : et, dans ces deux Séries, il y en a qui sont les mêmes pour $L(a^2)$ que pour $L((-a)^2)$.

Peut-on employer le développement de $\mathcal{L}(1+x)$ dans le cas où x est imaginaire ?

On a trouvé

$$\mathcal{L}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

Mais cette série ne donne de résultat déterminé que si x est compris entre -1 et $+1$: ce qu'on peut écrire $x^2 < 1$. — On tire de là

$$1+x = e^{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots} = 1 + \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots}{1} + \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \cdots\right)^2}{1.2} + \cdots$$

et c'est là une identité, tant que $x^2 < 1$. Si x dépasse ces limites, les parenthèses deviennent infinies. Si l'on change x en $x\sqrt{-1}$, on aura encore une identité, et cela est permis, car les parenthèses restent convergentes quand on change les signes, pourvu que $x^2 < 1$. On peut donc écrire

$$\mathcal{L}(1+z\sqrt{-1}) = z\sqrt{-1} + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\sqrt{-1} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

Si l'on a $\mathcal{L}(a+b\sqrt{-1})$, on remarque que

$$\mathcal{L}(a+b\sqrt{-1}) = \mathcal{L}a + \mathcal{L}\left(1 + \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)$$

et l'on peut faire le développement si $\frac{b}{a} < 1$, en valeur absolue, quel que soit son signe.

On a trouvé

$$\mathcal{L}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

et l'on a vu que, si l'on remplace z par $x\sqrt{-1}$, on

peut avoir le développement de $\mathcal{L}(1+x\sqrt{-1})$.

Cela posé, prenons

$$\begin{cases} \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x = e^{x\sqrt{-1}} \\ \cos x - \sqrt{-1}\,\sin x = e^{-x\sqrt{-1}} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x\sqrt{-1} = \mathcal{L}(\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x) \\ -x\sqrt{-1} = \mathcal{L}(\cos x - \sqrt{-1}\,\sin x) \end{cases}$$

En retranchant :

$$2x\sqrt{-1} = \mathcal{L}\frac{\cos x + \sqrt{-1}\,\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}\,\sin x} = \mathcal{L}\frac{1+\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} x}{1-\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} x} = \mathcal{L}(1+\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} x) - \mathcal{L}(1-\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} x)$$

Au reste on pourrait encore dire :

$$\begin{cases} x\sqrt{-1} = \mathcal{L}\cos x + \mathcal{L}(1+\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} x) \\ -x\sqrt{-1} = \mathcal{L}\cos x + \mathcal{L}(1-\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} x) \end{cases}$$

d'où

$$2x\sqrt{-1} = \mathcal{L}(1+\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} x) - \mathcal{L}(1-\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} x)$$

on peut développer les deux Logarithmes :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(1+\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} x) = \sqrt{-1}\,\operatorname{tg} x + \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \sqrt{-1}\,\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \cdots \\ \mathcal{L}(1-\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} x) = -\sqrt{-1}\,\operatorname{tg} x + \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \sqrt{-1}\,\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \cdots \end{cases}$$

Donc

$$2x\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}\left\{\operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \cdots\right\}$$

Et l'on sait que les deux membres sont identiques. Donc, en ôtant $\sqrt{-1}$, on aura identiquement

$$x = \operatorname{tg} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \tfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \tfrac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + \cdots$$

Mais il faut que $\operatorname{tg} x$ soit compris entre -1 et $+1$, et la formule n'est démontrée que pour ce cas, où

où $x < 45°$ et $> -45°$. — En désignant $\operatorname{tg} x$ par z, on aura

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots$$

Supposons $z > 1$, alors $\frac{1}{z} < 1$, et, comme $\operatorname{cotg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}$, l'arc dont la tangente est z est égal à l'arc complémentaire :

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} - \cdots \right)$$

Des produits de facteurs en nombre Infini.

Nous allons chercher les conditions de convergence des produits d'un nombre infini de facteurs. Ces expressions peuvent toujours être mises sous la forme

$$(1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\ \ldots\ (1+u_n)(\ldots)\ \ldots$$

le nombre des facteurs $(1+u_n)$ étant supposé croître à l'Infini. Les seconds termes $u_0, u_1, u_2, \ldots$ peuvent être positifs ou négatifs, mais, en valeur absolue, on peut toujours les supposer moindres que l'Unité. Car, si l'un d'eux était >1, on pourrait diviser ce facteur par son second terme, à condition de multiplier l'expression par ce même terme, et alors ce facteur serait ramené à la forme $(1+u_n)$, u_n étant <1.

Si nous prenons les Log. du produit d'un nombre qcq. de facteurs, ce produit, comme on sait, est égal à la somme des Logarithmes des facteurs, et, si le produit ~~croît au-delà de toute limite~~ tend vers une certaine limite quand le nombre des facteurs augmente indéfiniment, la série des Log. tend aussi vers une certaine limite, – et réciproquement.

La condition de convergence du produit proposé, quand

n croît au delà de toute limite, est donc la même que celle de la somme

$$\mathcal{L}(1+u_0) + \mathcal{L}(1+u_1) + \dots + \mathcal{L}(1+u_n) + \dots$$

quand n tend vers ∞.

Or, une première condition pour que cette dernière série soit convergente, c'est que ses termes convergent vers zéro à mesure que l'on considère des termes de plus en plus éloignés, c.a.d. que $\mathcal{L}(1+u_n)$ converge vers 0 quand n augmente indéfint., ou enfin que u_n tende vers zéro.

De plus, il faut que la somme des termes de la série à partir d'un terme suffisamment éloigné soit moindre qu'une quantité donnée qcq. – Or

$$\mathcal{L}(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} - \frac{u_n^4}{4} + \dots$$

$$\mathcal{L}(1+u_{n+1}) = u_{n+1} - \frac{u_{n+1}^2}{2} + \frac{u_{n+1}^3}{3} - \frac{u_{n+1}^4}{4} + \dots$$

etc.

Supposons d'abord que u_n, u_{n+1}, ... soient tous de même signe, positifs par ex. Nous pourrons écrire:

$$\mathcal{L}(1+u_n) = u_n(1+\varepsilon_1)$$

$$\mathcal{L}(1+u_{n+1}) = u_{n+1}(1+\varepsilon_2)$$

etc.

ε_1, ε_2 pouvant devenir aussi petits qu'on veut. – Écrivant la somme, et remarquant que, quand on a une somme de produits

$$ab + a'b' + a''b'' + \dots$$

où $a, a', a'' \dots$ sont toujours de même signe, cette somme est égale à la somme des premiers facteurs multipliés par une moyenne entre tous les autres, on aura

$$\mathcal{L}(1+u_n) + \mathcal{L}(1+u_{n+1}) + \dots = (u_n + u_{n+1} + \dots)(1+\varepsilon)$$

ε étant une moyenne entre toutes les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$ et par conséquent pouvant devenir moindre que toute quantité donnée.

Pour que la somme $\mathcal{L}(1+u_n) + \mathcal{L}(1+u_{n+1}) + \dots$ soit aussi petite qu'on veut, il faut donc que $u_n + u_{n+1} + \dots$ tende vers zéro, et réciproquement. – Donc, quand $u_n, u_{n+1}, \dots$ sont de même signe, pour que la série des logarithmes

$$\mathcal{L}(1+u_0) + \mathcal{L}(1+u_1) + \dots$$

et par suite le produit

$$(1+u_0)(1+u_1)\dots$$

soit convergente, il faut et il suffit que la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

des seconds termes soit elle-même convergente.

Supposons en second lieu que les termes $u_0, u_1, u_2 \dots$ ne soient pas tous de même signe. Nous remarquerons que, dans le développement en série des logarithmes $\mathcal{L}(1+u_n)$, $\mathcal{L}(1+u_{n+1})$, les seconds termes contenant $u_n, u_{n+1} \dots$ au carré sont tous de même signe.

Nous aurons alors

$$\mathcal{L}(1+u_n) = u_n - \frac{1}{2}u_n^2(1+\varepsilon_1)$$

$$\mathcal{L}(1+u_{n+1}) = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_{n+1}^2(1+\varepsilon_2)$$

etc.

Faisant la somme, nous pourrons écrire

$$\mathcal{L}(1+u_n) + \mathcal{L}(1+u_{n+1}) + \cdots = (u_n + u_{n+1} + \cdots) - \frac{1}{2}(u_n^2 + u_{n+1}^2 + \cdots)(1+\varepsilon)$$

ε étant une moyenne entre ε_1, ε_2 .... Il faut, pour la convergence du produit, que le second membre de cette égalité tende vers zéro.

Or d'abord, si la série $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ (dont nous ne supposons pas tous les termes de même signe) est convergente quand on prend tous ses termes avec le même signe, la série $u_n^2 + u_{n+1}^2 + \cdots$ sera aussi convergente a fortiori. Donc le second membre de l'égalité ci-dessus convergera vers 0, et par suite le produit $(1+u_0)(1+u_1)\cdots$ sera convergent.

Si la série des termes $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$, ces termes étant pris avec leurs signes, est convergente, et que la série des carrés $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \cdots$ soit aussi convergente, le second membre de l'égalité ci-dessus converge encore vers 0, et par conségt. le produit proposé est convergent.

Si la série $u_0 + u_1 + \cdots$, ces termes étant pris

avec leurs signes, est convergente, mais que la série des carrés $u_0^2 + u_1^2 + \cdots$ soit divergente, il est aisé de voir que le second membre de l'égalité ci-dessus devient $-\infty$. Par suite, la série des logarithmes a pour valeur $-\infty$. — Le produit proposé converge donc lui-même vers 0, dont le logarithme est $-\infty$.

Considérons par exemple le produit

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdots$$

La série $u_0 + u_1 + u_2 \ldots$ est ici

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

Cette série est convergente puisque les termes sont alternativement positifs et négatifs, et décroissants au-delà de toute limite. Au contraire la série $u_0^2 + u_1^2 + \ldots$ est

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

série divergente. — La série des Log. converge donc vers $-\infty$, et par suite le produit proposé a pour limite zéro.

Le produit

$$\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

est convergent, parce que la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

est convergente.

Il en est de même du produit

$$\left\{1 \pm \left(\frac{x}{1}\right)^2\right\}\left\{1 \pm \left(\frac{x}{2}\right)^2\right\}\left\{1 \pm \left(\frac{x}{3}\right)^2\right\} \cdots$$

Si la série $u_0 + u_1 + \cdots$ et la série $u_0^2 + u_1^2 + \cdots$ étaient toutes deux divergentes, on ne pourrait tirer aucune conclusion générale, parce que, dans la valeur de

$$L(1+u_n) + L(1+u_{n+1}) + \cdots$$

entre la différence de ces deux séries.

Sur les Fonctions Symétriques.

Avant de faire qq. applications des principes que nous venons de poser, rappelons qq. Théorèmes sur les fonctions Symétriques.

On sait que les Coefficients des termes d'une Eq. algébrique rationnelle et entière à une seule variable sont des fonctions symétriques des Racines de cette Eq. — Pour avoir ces fonctions, voici comment on peut agir.

Soit donnée l'Eq.

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

ou

$$X = 0$$

Et formons la dérivée du 1er. membre. ce sera

$$m x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} + (m-2) A_2 x^{m-3} + \cdots + A_{m-1}$$

D'un autre côté, le premier membre X de l'Eq. peut s'écrire

$$(x-a)(x-b)(x-c) \cdots (x-l)$$

$a, b, c, \ldots l$ désignant les Racines de l'Eq. $X=0$.

En différentiant ce produit, nous avons

$$\frac{X}{x-a} + \frac{X}{x-b} + \frac{X}{x-c} + \cdots + \frac{X}{x-l}$$

et cette expression doit être égale à la dérivée écrite ci-dessus. — or, si nous formons cette dernière Expression, en mettant pour X sa valeur, et effectuant les divisions, nous trouvons

$$\begin{array}{c|c|l} mx^{m-1} + S_1 & x^{m-2} + S_2 & x^{m-3} + \cdots \\ + mA_1 & + A_1 S_1 & \\ & + m A_2 & \end{array}$$

S_1 désignant la somme des racines $a, b, c, \ldots$; S_2, S_3 .. la somme de leurs carrés, de leurs cubes, ... Identifiant avec la dérivée trouvée directement, on a

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 + A_1 = 0 \\ S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 = 0 \\ S_3 + A_1 S_2 + A_2 S_1 + 3A_3 = 0 \\ \vdots \\ S_{m-1} + A_1 S_{m-2} + A_2 S_{m-3} + \cdots + (m-1) A_{m-1} = 0 \end{array}\right.$$

formules qui permettent d'avoir les sommes S_1 S_2 .. S_{m-1}.

Pour avoir la somme S_m des $m^{ièmes}$ puissances des racines, faisons successivement dans l'Eq. $X = 0$ $x = a, b, c, \ldots$ et ajoutons. Nous aurons

$$S_m + A_1 S_{m-1} + \cdots + m A_m = 0$$

Pour avoir la somme des puissances $m+n$, n étant qcq ; multiplions l'Eq. $X = 0$ par x^n, et faisons-y successiv^t. $x = a, b, c$ .. et ajoutons : nous aurons

$$S_{m+n} + A_1 S_{m+n-1} + A_2 S_{m+n-2} + \cdots + A_m S_n = 0$$

formule qui donne la somme des puissances positives semblables d'ordre qcq.

Cette même formule permettrait d'avoir S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, ... sommes de puissances négatives semblables des racines de l'Eq. – Il suffirait pour cela d'y donner à n des valeurs négatives convenables. – Mais on peut y arriver par des formules plus simples.

Formons en effet une Eq. dont les racines soient les réciproques des racines de l'Eq. proposée. – Pour cela, posons

$$x = \frac{1}{y}$$

d'où

$$\frac{1}{y^m} + \frac{A_1}{y^{m-1}} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{y} + A_m = 0$$

ou bien

$$y^m + \frac{A_{m-1}}{A_m} y^{m-1} + \cdots + \frac{A_1}{A_m} y + \frac{1}{A_m} = 0$$

et la somme des puissances positives semblables des racines de cette Eq. est la somme des puissances négatives semblables de l'Eq. proposée. Et alors, si nous désignons par Σ_1, Σ_2, ... ces sommes de puissances négatives nous aurons pour les déterminer :

$$\Sigma_1 + \frac{A_{m-1}}{A_m} = 0$$

$$\Sigma_2 + \frac{A_{m-1}}{A_m} \Sigma_1 + 2 \frac{A_{m-2}}{A_m} = 0$$

etc.

Développement de Sin x et Cos. x en produits Indéfinis.

Revenons maintenant aux produits d'un nombre infini de facteurs, et proposons-nous d'exprimer par de semblables produits, les Sinus et Cosinus des multiples d'un arc.

on a

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2} x \sin^2 x \cdots\cdots \pm \sin^m x$$

Le dernier terme de ce développement est $(-1)^{\frac{m}{2}}\sin^m x$ si m est pair, et $(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin^{m-1} x \cos x$ si m est impair.

on a de même

$$\sin mx = m\cos^{m-1} x \sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3} x \sin^3 x + \cdots$$

Nous nous bornerons à faire le calcul pour le Cosinus. Il serait identiquement pareil pour le Sinus.

Commençons par exprimer $\cos mx$ en fonction des puissances d'une seule des lignes trigonométriques de x. Pour cela, le Sinus n'entrant dans le second membre qu'à des puissances paires, Remplaçons-y $\sin^2 x$ par $1-\cos^2 x$, ce qui laissera le second membre Rationnel. Il est aisé de voir qu'après cette substitution, la plus haute puissance de $\cos x$ sera la m^e. et, si

m est pair; le second membre sera un polynôme du m^e. ordre en $\cos x$, où tous les termes contiendront $\cos x$ à des puissances paires. — Si au contraire m est impair, $\cos x$ sera facteur à tous les termes, et l'on pourra mettre le second membre sous la forme du produit de $\cos x$ par un polynôme du $(m-1)^e$. ordre en $\cos x$, où tous les termes contiendront $\cos x$ à des puissances paires.

Nous aurons alors

$$\cos mx = \cos^m x \left\{ 1 + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} + \cdots \begin{matrix} +1 \\ \text{ou } +m \end{matrix} \right\}$$

$$+ \cos^{m-2} x \left\{ \text{un certain coefficient} \right\} + \text{etc.}$$

Dans le coefficient de $\cos^m x$, nous avons pour dernier terme $+1$ ou $+m$ suivant que m est pair ou impair. — Or on a

$$2^m = (1+1)^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \cdots + m + 1$$

$$0 = (1-1)^m = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \cdots \pm 1$$

± 1, suivant que m est pair ou impair.

En ajoutant membre à membre, on trouve dans le premier membre 2^{m-1}, et dans le second, le coefficient de $\cos^m x$ dans le développement de $\cos mx$. On peut donc écrire

$$\cos mx = 2^{m-1} \left(\cos^m x + a \cos^{m-2} x + \cdots \begin{matrix} + p \\ \text{ou } + p\cos x \end{matrix} \right)$$

$+p$ si m pair, $+p\cos x$, si m est impair.

$a \dots p$ sont des coefficients dont il est inutile de chercher la valeur.

Nous avons dans le second membre un polynôme du m^e. degré en $\cos x$. Nous pouvons donc le supposer décomposé en facteurs simples de la forme

$$(\cos x - \alpha) \quad , (\cos x - \beta) \; , \dots$$

L'une des racines $\alpha, \beta, ..$ sera nulle dans le cas de m impair. $\alpha, \beta ..$ sont les quantités qui, substituées pour $\cos x$ dans le second membre, l'annulent. Nous les obtiendrons évidemment en cherchant les quantités qui, substituées pour x dans le premier membre, annulent $\cos mx$. — $\cos mx$ ne s'annule que pour les valeurs de x données par

$$mx = \frac{\pi}{2} \quad , \frac{\pi}{2} + \pi \; , \; \dots$$

d'où

$$x = \frac{\pi}{2m} \; , \quad \frac{\pi}{2m} + \frac{\pi}{m} \quad , \quad \dots \; , \; \frac{\pi}{2m} + \frac{(m-1)\pi}{m} \; , \dots$$

et, en prenant pour $\cos x$ les valeurs des cosinus de ces arcs, on aura les valeurs de $\alpha, \beta, ..$ satisfaisant à la condition ci-dessus. — En réalité nous avons une infinité de ces arcs pour lesquels $\cos mx$ s'annule: mais il suffit d'en considérer m consécutifs qcq. car m autres consécutifs donneraient les mêmes résultats.

Nous pouvons remarquer que les deux extrêmes de ces arcs sont supplémentaires, et par conséquent deux

qcq. équidistants des extrêmes le sont aussi. — Si m est impair, l'arc du milieu est égal à $\frac{\pi}{2}$. — Cos mx s'écrira alors :

$$\cos mx = 2^{m-1}\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(\cos x - \cos\frac{3\pi}{2m}\right)\cdots\left(\cos x - \cos\frac{2m-1}{2m}\pi\right)$$

pour m pair, et

$$\cos mx = 2^{m-1}\cos x\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\cdots$$

pour m impair.

Or les cosinus d'arcs supplémentaires sont égaux et de signes contraires. D'après cela nous pouvons, dans l'expression ci-dessus grouper les facteurs deux à deux, et écrire

$$\cos mx = 2^{m-1}\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{2m}\right)\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{3\pi}{2m}\right)\cdots \quad m \text{ pair}$$

ou

$$\cos mx = 2^{m-1}\cos x\left(\cdots\right)\left(\cdots\right)\cdots \quad m \text{ imp.}$$

Remplaçons les différences des carrés de cosinus par des différences de carrés de sinus d'après la formule

$$\cos^2 a - \cos^2 b = (1-\sin^2 a) - (1-\sin^2 b) = \sin^2 b - \sin^2 a$$

il vient

$$\cos mx = 2^{m-1}\left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\cdots$$

$$= 2^{m-1}\sin^2\frac{\pi}{2m}\sin^2\frac{3\pi}{2m}\cdots\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots$$

en supposant m pair. — Si m était impair, on aurait une expression toute semblable où seulement on aurait $\cos x$ en facteur dans le second membre.

Or si, dans cette expression, nous faisons $x=0$, il vient

$$1 = 2^{m-1} \sin\frac{\pi}{2m} \sin\frac{3\pi}{2m} \cdots$$

Donc, en substituant,

$$\cos mx = \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots \quad m \text{ pair}$$

ou

$$\cos mx = \cos x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots \quad m \text{ imp.}$$

Changeons x en $\frac{x}{m}$. Il vient

$$(A) \qquad \cos x = \left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{5\pi}{2m}}\right)\cdots$$

Cette formule a lieu quelque grand que soit m, et elle est la même dans le cas de m pair ou impair sauf le facteur $\cos\frac{x}{m}$ qui se trouve de plus dans le second membre quand m est impair. – Or supposons que m converge vers ∞. Dans le cas de m impair le premier facteur $\cos\frac{x}{m}$ tend vers 1. Il en résulte que, dans tous les cas, nous n'avons à nous occuper que de la discussion d'une expression de la forme du second membre de (A) quand m converge vers ∞.

Avant de faire cette discussion, faisons d'abord qq. remarques :

Le produit indéfini

$$\left(1 - \frac{a^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{3^2}\right)\cdots$$

est convergent quel que soit a. C'est ce qui résulte immédiatement des règles posées antérieurement pour la convergence des produits indéfinis.

En second lieu, le rapport

$$\frac{\sin x}{x}$$

quand on a $x < \frac{\pi}{2}$; est d'autant plus petit que x est plus grand. — on s'en rend compte facilement par des considérations géométriques. — Mais on peut aussi s'en rendre compte analytiquement. En effet la dérivée de $\frac{\sin x}{x}$ est

$$\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

dont le signe est celui de $x\cos x - \sin x$, ou de $x - \operatorname{tg} x$, en supposant $\cos x$ petit, et par conséquent $x < \frac{\pi}{2}$. or cette expression est évidemment négative, pour $x < \frac{\pi}{2}$. Donc $\frac{\sin x}{x}$ est une fonction décrois-sante quand x croît, ce que nous avions énoncé.

Il en résulte que si l'on a $a < b$, et $b < \frac{\pi}{2}$, on aura

$$\frac{\sin a}{a} > \frac{\sin b}{b}$$

et par conséquent

$$\frac{\sin a}{\sin b} > \frac{a}{b}$$

De 0 à $\frac{\pi}{2}$ la plus grande des valeurs du rapport du sinus à l'arc correspond au cas où l'arc est nul. alors $\frac{\sin a}{a} = 1$: et la plus petite, au cas où l'arc est $\frac{\pi}{2}$: et dans ce dernier cas, le rapport est $\frac{2}{\pi}$. Donc les quantités

$$1 \quad \frac{\sin a}{a} \quad \frac{\sin b}{b} \quad \frac{2}{\pi}$$

sont rangées par ordre de grandeur. on en conclut

$$\frac{\frac{\sin a}{a}}{\frac{\sin b}{b}} < \frac{\pi}{2}$$

et par conséquent

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi}{2}\frac{a}{b}.$$

On voit donc, en rapprochant cette relation de la relation $\frac{\sin a}{\sin b} > \frac{a}{b}$, que $\frac{\sin a}{\sin b}$ est compris entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{\pi}{2}.\frac{a}{b}$.

Ces Lemmes posés, revenons au développement écrit plus haut. Or, quand m croît indéfiniment, les seconds termes de nos facteurs binômes convergent vers les rapports des carrés des arcs qu'ils contiennent, puisque ces arcs eux-mêmes sont aussi petits qu'on veut, et par conséquent peuvent être remplacés par leurs sinus. Le facteur de rang p converge donc vers l'expression

$$1 - \frac{4x^2}{p^2\pi^2}$$

Mais pour que la substitution puisse se faire, il faut prouver que le produit des facteurs à partir d'un certain rang, aussi éloigné du reste qu'on le voudra, peut être considéré comme égal à l'unité. — La forme générale de ces facteurs est

$$1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{2m}}$$

k étant très-grand. Or, le rapport de $\sin^2\frac{x}{m}$

à $\sin^2 \frac{k\pi}{2m}$ est, d'après ce que nous avons vu, compris entre

$$\frac{4x^2}{k^2\pi^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{2x}{k\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{k^2}$$

Si nous remplaçons le facteur que nous considérons par

$$\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) \quad \text{ou par} \quad \left(1-\frac{4x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

et de même pour les autres, nous aurons deux produits, l'un plus grand, l'autre plus petit que celui que nous considérons. or chacun de ces produits peut approcher séparément aussi près qu'on veut de l'Unité, puisque ces produits sont de la forme

$$\left(1-\frac{a^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)\ldots$$

produits toujours convergents, et tels par conséquent que le produit de leurs facteurs à partir d'un certain rang est aussi près de l'Unité qu'on veut. — Il en résulte que le produit

$$\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(2n+1)\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{(2n+3)\pi}{2m}}\right)\ldots$$

des facteurs du produit ci-dessus à partir d'un rang n suffisamment éloigné, peut être regardé comme aussi voisin de 1 qu'on veut, puisqu'il est toujours compris entre deux expressions aussi voisines de 1 qu'on veut. Donc nous pouvons écrire avec une approximation aussi grande que nous voudrons :

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)$$

n croissant au delà de toute limite.

On vérifie aisément sur cette expression que les valeurs de x qui annulent un facteur du second membre annuleront aussi le premier.

On part quelquefois même de là pour établir la formule. On admet alors qu'un polynôme de degré m fini ou infini

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{20} + \cdots$$

est décomposable en facteurs simples comme un polynôme de degré fini. Ce point est contestable. — On ne voit pas ensuite que le second membre ne puisse pas contenir en facteur une fonction qui se réduirait à l'unité quand $\cos x = 0$.

Un calcul analogue à celui que nous avons développé conduit à

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Les formules précédentes peuvent conduire à d'autres. Changeons dans ces formules x en $x\sqrt{-1}$: il viendra

$$\begin{cases} \sin(x\sqrt{-1}) = x\sqrt{-1}\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \\ \cos(x\sqrt{-1}) = \left(1 + \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots \end{cases}$$

or on a

$$\cos x = \tfrac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right)$$

d'où

$$\cos(x\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

de même

$$\sin(x\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

Donc

$$\left\{\begin{aligned} \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} &= \left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots \\ \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} &= x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots \end{aligned}\right.$$

Ces formules sont celles qu'Euler a établies d'abord et c'est de là qu'il a déduit celles qui donnent $\sin x$ et $\cos x$ en produits.

Formule de Wallis. — Dans la formule qui donne $\sin x$ en produit, faisons $\frac{x}{\pi} = \frac{1}{2}$. Il vient

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdots$$

Nous pouvons remarquer que chaque facteur est la différence de deux carrés. Donc, dédoublant ces facteurs, nous aurons

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots$$

or réduisons au même dénominateur les deux élé-

-mes des différents facteurs. Il est aisé de voir par la nature de ces facteurs que nous aurons toujours de suite deux numérateurs égaux, et de même, deux dénominateurs, mais ne correspondant pas aux numérateurs, et de plus, que les numérateurs seront toujours impairs et les dénominateurs pairs. Il viendra

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots$$

de là

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}$$

c'est la formule qui porte le nom de formule de Wallis.

Si l'on voulait s'en servir pour calculer π, elle serait peu commode, parce que sa convergence est peu rapide; mais on peut la transformer en une autre de convergence beaucoup plus rapide. — on peut l'écrire en effet

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right) \cdots = 2\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots$$

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots$$

formule beaucoup plus convergente.

---

applications diverses.

Cherchons à calculer les sommes des puissances négatives semblables des nombres entiers. —

Si nous développons Sin x en série à la manière ordinaire, en égalant ce développement à celui de Sin x en produit, nous aurons

$$x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots$$

ou, en divisant les deux membres par x et posant $\frac{x^2}{\pi^2} = z$

$$(1-z)\left(1-\frac{z}{2^2}\right)\left(1-\frac{z}{3^2}\right)\left(1-\frac{z}{4^2}\right)\cdots = 1 - \frac{\pi^2 z}{1.2.3} + \frac{\pi^4 z^2}{1.2..5} - \cdots \quad (A)$$

Si nous effectuons le produit d'un certain nombre des facteurs du premier membre, les coefficients des différentes puissances de z dans ce produit, à mesure qu'on prendra un plus grand nombre de facteurs, convergeront vers les coefficients des mêmes puissances de z dans le second membre. — Or, quand on a une relation de la forme

$$(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)\cdots = 1 + Az + Bz^2 + \cdots \quad (a)$$

$\alpha, \beta, \gamma \ldots$ sont les inverses des racines de l'Eq. obtenue en égalant un nombre qcq. des facteurs du premier membre à zéro, et les sommes

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \cdots$$

etc.

ont pour limites, quand le nombre de ces facteurs croît indéfiniment, les valeurs de σ_1, σ_2, σ_3 ... dans les relations :

$$(b)\quad\begin{cases}\sigma_1 - A = 0\\ \sigma_2 - A\sigma_1 + 2B = 0\\ \sigma_3 - A\sigma_2 + A\sigma_1 - 3C = 0\\ \text{etc}\end{cases}$$

or l'Eq. (A) est de la forme (a) et les valeurs de σ_1 σ_2 σ_3 .. dans l'Eq. (A) sont

$$\begin{cases}\sigma_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\\ \sigma_2 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots\\ \text{etc.}\end{cases}$$

σ_1 σ_2 .. seront donc donnés par les Eq. (b) où l'on mettra pour A, B, C .. les valeurs des coefficients du second membre de (A). on aura ainsi

$$\begin{cases}\sigma_1 = \frac{\pi^2}{6}\\ \sigma_2 = \frac{\pi^4}{90}\\ \text{etc.}\end{cases}$$

On rencontre souvent aussi dans l'analyse les sommes des inverses des puissances semblables de tous les nombres pairs ou de tous les nombres impairs. on les déduit de la formule

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots$$



exactement comme nous venons de le faire en partant des sinus pour tous les nombres.

Mais on peut aussi déduire ces valeurs des expressions trouvées précédemment. ainsi, soit

$$(1) \qquad 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots = M$$

M dépendant de π^n. Nous pouvons en déduire, la valeur de l'expression

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots$$

Pour cela, divisons toute l'expression (1) par 2^n. Il vient

$$(2) \qquad \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \cdots = \frac{M}{2^n}$$

Retranchons (1) et (2) membre à membre. Il vient

$$(3) \qquad 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \cdots = M\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

et nous avons ainsi deux formules qui donnent la somme des puissances semblables de fractions ayant dénominateurs tous les nombres pairs ou tous les nombres impairs.

Si nous retranchons deux fois l'Eq. (2) de l'Eq. (1), il vient

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \cdots = M\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$A = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = 1{,}2337005501361698273 5\ldots$$

$$B = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = 1{,}01467803\ldots$$

$$C = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots = 1{,}0014470766\ldots$$

$$D = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \cdots = 1{,}0001551790\ldots$$

$$A' = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = 0{,}41123351671205660911 81\ldots$$

$$B' = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^6} + \cdots = 0{,}067645202\ldots$$

$$C' = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \cdots = 0{,}01589598\ldots$$

$$D' = \frac{1}{2^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \cdots = 0{,}0039221771726\ldots$$

Appliquons ces valeurs au calcul de certaines quantités importantes dans l'analyse.

La formule de Wallis donne

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots}$$

d'où

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\cdots$$

$$\mathcal{L}\pi = 2\,\mathcal{L}2 + \mathcal{L}\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \mathcal{L}\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) + \mathcal{L}\left(1 - \frac{1}{7^2}\right) + \cdots$$

Développant tous les Logarithmes du 2° membre à partir du second terme par la formule

$$\mathcal{L}(1-z) = -\left\{ z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \cdots \right\}$$

il vient

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{L}\left(1-\frac{1}{3^2}\right) = -\left\{\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^6} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^8} + \cdots\right\} \\ \mathcal{L}\left(1-\frac{1}{5^2}\right) = -\left\{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^6} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^8} + \cdots\right\} \\ \mathcal{L}\left(1-\frac{1}{7^2}\right) = -\left\{\frac{1}{7^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7^4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^6} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7^8} + \cdots\right\} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

ajoutant toutes ces Expressions avec $2\,\mathcal{L}2$ en ayant soin d'ajouter ensemble tous les premiers termes, puis tous les seconds, etc., il vient

$$\mathcal{L}\pi = 2\,\mathcal{L}2 - (A-1) - \frac{1}{2}(B-1) - \frac{1}{3}(C-1) - \cdots$$

A, B, C, .. étant les nombres que nous avons écrits plus haut.

Passons à la Construction des Tables des Logarithmes des Lignes trigonométriques.

Nous avons trouvé

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$

où x désigne le Rapport de l'arc au Rayon.
Si nous voulons avoir le Cos. de la fraction $\frac{m}{n}$ de l'angle droit, il faudra poser

$$x = \frac{m}{n}\,\frac{\pi}{2}\,;$$

alors

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{3^2n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{5^2n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{7^2n^2}\right)\cdots$$

Prenant les Log. népériens

$$\mathcal{L}\cos\frac{m\pi}{2n} = \mathcal{L}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right) + \mathcal{L}\left(1-\frac{m^2}{3^2n^2}\right) + \cdots$$

Développant tous les Logarithmes, j'aurai

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{L}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right) = -\left\{\frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{2}\frac{m^4}{n^4} + \frac{1}{3}\frac{m^6}{n^6} + \cdots\right\} \\ \mathcal{L}\left(1-\frac{m^2}{3^2n^2}\right) = -\left\{\frac{m^2}{3^2n^2} + \frac{1}{2}\frac{m^4}{3^4n^4} + \frac{1}{3}\frac{m^6}{3^6n^6} + \cdots\right\} \\ \mathcal{L}\left(1-\frac{m^2}{5^2n^2}\right) = -\left\{\frac{m^2}{5^2n^2} + \frac{1}{2}\frac{m^4}{5^4n^4} + \frac{1}{3}\frac{m^6}{5^6n^6} + \cdots\right\} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

et, en ajoutant

$$\mathcal{L}.\cos\frac{m\pi}{2n} = -A\frac{m^2}{n^2} - \frac{B}{2}\frac{m^4}{n^4} - \frac{C}{3}\frac{m^6}{n^6} - \cdots$$

Cette formule se trouve dans l'introduction de la Table des Log. de Callet, p. 47.

On peut remarquer que les quantités $A, B, C\ldots$ sont égales à l'Unité, plus une fraction. — or si l'on pouvait remplacer cette expression par une autre où les quantités $A, B, C \ldots$ fussent remplacées par des quantités <1, la série serait plus convergente. Pour atteindre ce but, nous nous dispenserons, dans la valeur de $\mathcal{L}.\cos\frac{m\pi}{2n}$, de calculer par série le

premier Logarithme, et nous aurons

$$L.\cos\frac{m\pi}{2n} = L\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right) - (A-1)\frac{m^2}{n^2} - \frac{(B-1)}{2}\frac{m^4}{n^4} - \cdots$$

$$= L(n-m) + L(n+m) - 2\,Ln - (A-1)\frac{m^2}{n^2} - \frac{(B-1)}{2}\frac{m^4}{n^4} - \cdots$$

formule où $A-1$, $B-1$, ... sont des fractions.

Si, dans la somme

$$L\cos\frac{m\pi}{2n} = L\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right) + L\left(1-\frac{m^2}{3^2n^2}\right) + L\left(1-\frac{m^2}{5^2n^2}\right) + \cdots$$

on commence à développer les logarithmes en séries seulement à partir du troisième terme du second membre, on obtiendra encore une série plus convergente. (Voir l'introduction de Callet).

Passons à la Recherche des Logarithmes des Sinus. on a en Général; en posant $x = \frac{m\pi}{2n}$:

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4^2n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{6^2n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{8^2n^2}\right)\cdots$$

on tire de là, en prenant les Logarithmes des deux membres, puis développant $L\left(1-\frac{m^2}{2^2n^2}\right)$, $L\left(1-\frac{m^2}{4^2n^2}\right)\cdots$ comme précédemment, une formule tout-à-fait semblable.

ayant les Logarithmes des Sinus et des Cosinus, on en déduit Immédiatement par une soustraction ou une addition les Log. des Tg. cotg. Séc. Cosèc. etc.

Il y a même une remarque qui permet de ramener le calcul des Log Sin. à celui des L. Cos. on a en effet

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

d'où

$$2 \sin (45^\circ - 2)\ \cos (45^\circ - 2) = \cos 2 2$$

formule qui permet de calculer les Log. Sin. quand on connait les Log. Cos. jusqu'à 45°.

Nous passons à l'Etablissement de la formule qui donne le développement de la tangente en fonction des puissances de l'arc.

Nous avons

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{y}{x} \frac{\left(1-\frac{y^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots}{\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots}$$

$$= \frac{(\pi^2-y^2)(2^2\pi^2-y^2)(3^2\pi^2-y^2)\cdots}{(\pi^2-x^2)(2^2\pi^2-x^2)(3^2\pi^2-x^2)\cdots}.$$

Posons $\quad y = x + z$

Méthode des Différences finies.

Lorsque, dans une fonction à une seule variable, on donne à cette variable un accroissement h, l'accroissement

$$f(x+h) - f(x)$$

est ce qu'on appelle la Différence de la fonction correspondant à la différence h de la variable.

La différence dépend de x, de h, et de la nature de la fonction.

Si, dans la différence, on donne un accroissement à la variable x, cette différence de la fonction prendra un nouvel accroissement que l'on appelle la différence seconde de la fonction donnée. — De même si, dans la différence seconde, on donne à la variable un nouvel accroissement, l'accroissement de cette différence seconde sera ce qu'on appelle la différence troisième, et ainsi de suite.

Cherchons par exemple les différences successives de x^2. La différence première sera

$$(x+h)^2 - x^2 \quad \text{ou} \quad 2hx - x^2$$

Si, dans cette différence, on change x en $x+h$, on a pour différence seconde

$$2h(x+h) - (x^2+h)^2 - 2hx + x^2 \quad \text{ou} \quad h^2$$

on voit que la différence seconde est constante. Par suite la différence troisième est nulle.

Prenons encore la fonction x^3. — Sa différence première est

$$(x+h)^3 - x^3 \qquad \text{ou} \qquad 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

La différence seconde est

$$3(x+h)^2h + 3(x+h)h^2 + h^3 - (3x^2h + 3xh^2 + h^3)$$

$$\text{ou} \qquad 2.3h^2x + 6h^3$$

De la même manière, on trouverait pour différence troisième

$$2.3.h^3$$

et pour différence quatrième, zéro.

Si, au lieu d'avoir pris x^2, ou x^3, nous avions considéré Ax^2, Ax^3, nous aurions trouvé les mêmes différences multipliées par A.

Nous pouvons remarquer que l'addition d'un terme constant ne change pas la différence,

Théorème. La différence d'un monôme de la forme Ax^n est de l'ordre x^{n-1}.

c'est évident d'après ce qui précède.

Considérons en général un polynôme entier et rationnel

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Tx + U$$

La différence première sera de la forme

$$mAhx^{m-1} + A'x^{m-2} + \text{etc.}$$

A' ... étant des coefficients qu'il serait facile de former.

Nous pouvons remarquer que le premier terme de la différence ne dépend que du premier terme de la fonction.

Pour la différence seconde, on aurait

$$m(m-1)\,Ah^2x^{m-2} + \dots\dots$$

pour la différence troisième

$$m(m-1)(m-2)\,Ah^3x^{m-3} + \dots\dots$$

En continuant ainsi jusqu'à la différence $(m-1)^e$, on aurait

$$m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1.\,Ah^m$$

qui est une quantité constante. — La différence $(m+1)^e$ est nulle.

Les différences se désignent en général par la lettre Δ.

ainsi, soit donnée une fonction $y = f(x)$. La

Différence première s'indique

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

h se désigne souvent aussi par Δx.

La différence seconde, $\Delta . \Delta y$, s'indique ainsi : $\Delta^2 y$, et l'on a évidem^t.

$$\Delta^2 y = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

La différence $n^{ième}$ en général se désigne par $\Delta^n y$.

En général on suppose que, pour former les différences successives, on donne à x le même accroissem^t h. Mais on peut aussi ne pas s'astreindre à cette condition, et former les différences successives en faisant croître x successivement de h, h', h''.. Dans ce qui suivra, nous n'aurons à considérer que des différences où h est constant. – Cependant, certains des principes que nous allons démontrer sont indépendants de cette condition.

Quelle que soit la manière dont on fasse croître x, supposons que la fonction y, pour les valeurs

$$x\ ,\quad x+h,\quad x+h+h_1\ ,\quad x+h+h_1+h_2, ..$$

de la variable, soit représentée par

$$y\ ,\quad y_1\ ,\quad y_2\ ,\quad y_3\ , ...$$

Nous allons chercher la loi de formation des différences successives.

Nous avons par définition

$$\begin{cases} \Delta y = y_1 - y \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1 \\ \Delta y_2 = y_3 - y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_{m-2} = y_{m-1} - y_{m-2} \\ \Delta y_{m-1} = y_m - y_{m-1} \end{cases}$$

Nous avons ensuite

$$\begin{cases} \Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y \\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 \\ \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta^2 y_{m-2} = \Delta y_{m-1} - \Delta y_{m-2} \end{cases}$$

De même

$$\begin{cases} \Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y \\ \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 \\ \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 \\ \vdots \end{cases}$$

et ainsi de suite jusqu'aux différences m^{es}.

Or nous avons

$$\Delta y = y_1 - y$$

$$\Delta^2 y = (y_2 - y_1) - (y_1 - y)$$

$$= y_2 - 2y_1 + y$$

$$\Delta^3 y = y_3 - 2y_2 + y_1 - (y_2 - 2y_1 + y)$$

$$= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y$$

on reconnait une loi dans les termes de ces différences successives. — or, supposons qu'on ait trouvé en général

$$\Delta^n y = Ay_n + By_{n-1} + Cy_{n-2} + \cdots + Vy$$

et voyons comment se formera la différence suivante.

Supposons x changé en $x+h$. Par ce changement, y_n se change en y_{n+1}, y_{n-1} en y_n … et le polynome $\Delta^n y$ devient

$$Ay_{n+1} + By_n + Cy_{n-1} + \cdots + Vy_1$$

Pour avoir l'accroissement, il faut retrancher de ceci la valeur de $\Delta^n y$: et nous aurons

$$\Delta^{n+1} y = Ay_{n+1} + \begin{array}{c} B \\ -A \end{array}\Bigg| y_n + \begin{array}{c} C \\ -B \end{array}\Bigg| y_{n-1} + \cdots + \begin{array}{c} V \\ -T \end{array}\Bigg| y_1 - Vy$$

on voit qu'il faut augmenter tous les indices d'une unité en allant toujours jusqu'à l'indice zero.

Quant aux coefficients des termes successifs, ils se forment toujours en prenant le coefficient du terme correspondant de la différence dont on part, et en retranchant le coefficient du terme précédent. — Or on peut remarquer que la loi de formation de ces coefficients est précisément celle qui s'observe dans la formation des puissances successives d'un binôme à partir de la seconde. Donc nous aurons pour expression de la différence m^e.

$$\Delta^m y = y_m - m y_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} y_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} y_{m-3} + \cdots \mp m y_1 \pm y$$

Nous allons maintenant établir une autre formule très importante dans le calcul des différences.

On a

$$y_1 = y + \Delta y$$

$$y_2 = (y + \Delta y) + \Delta y + \Delta^2 y$$

$$= y + 2\Delta y + \Delta^2 y.$$

Formons de même y_3 : nous aurons, en changeant chacune des parties de y_2 en cette partie, plus son accroissement quand x croît de h :

$$y_3 = (y + 2\Delta y + \Delta^2 y) + \Delta y + 2\Delta^2 y + \Delta^3 y$$

$$= y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$$

Il est aisé de saisir la loi des Indices. – Et quant aux coefficients, on voit que ce sont ceux de la puissance du Binôme. or, nous allons voir que cette loi est Générale. – Supposons que y_n est a soit un Dévelop-pement conforme à cette loi

$$y_n = y + A\,\Delta y + B\,\Delta^2 y + \dots$$

et voyons comment on forme y_{n+1}. Nous aurons, en changeant chacune des parties de y_n en cette partie plus son accroissement pour l'accroissement h de x,

$$y_{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} y + A\,\Delta y + B\,\Delta^2 y + \dots + V\,\Delta^n y \\ + \Delta y + A\,\Delta^2 y + B\,\Delta^3 y + \dots + V\,\Delta^{n+1} y \end{array} \right\}$$

Il est aisé de voir en réduisant que le second membre contiendra y plus une suite de termes contenant les différences de y depuis la première jusqu'à la $(n+1)^e$. Quant aux coefficients, il est aisé de voir qu'il faut ajouter le coeff. de $\Delta^h y$ au coefficient de $\Delta^{h-1} y$ dans y_n pour avoir le coefficient de $\Delta^{h+1} y$ dans la différence $(n+1)^e$. C'est là la loi d'après laquelle les coeff. des puissances successives du Binôme se déduisent de ceux de la puissance précédente; – et, comme les coeff. des premières fonctions y_1 y_2 y_3 sont ceux des premières puissances du Binôme, il s'ensuit que pour une

Différence m^e. qcq. les coefficients seront ceux de la puissance m^e. du binôme $(x+\alpha)^m$. Donc

$$y_m = y + \frac{m}{1}\Delta y + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \cdots + \Delta^m y$$

on représente souvent cette valeur de y_m par le symbole

$$y_m = (1+\Delta)^m y$$

en entendant que, dans le développement du second membre Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ .. seront considérés non comme le produit de Δ, Δ^2, Δ^3 ... par y, mais comme les différences première, seconde, troisième, .. de la fonction y.

De même, l'expression trouvée précédemment pour $\Delta^m y$ s'écrit sous la forme symbolique

$$\Delta^m y = (y-1)^m$$

en convenant que, dans le développement de $(y-1)^m$, on changera tous les exposants de m en indices.

Prenons pour exemple le polynôme

$$y = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$$

et supposons que $h = 1$. Les différences troisièmes sont, quel que soit x, toutes égales à 1.2.3 ou à 6.

Je dis que trois valeurs consécutives du polynôme nous permettront de trouver toutes les autres. — Prenons les valeurs du polynôme pour $-1, 0, 1$. Ces valeurs sont

$$-13 \qquad -1 \qquad +1$$

$$y = -13 \quad , -1 \quad , +1$$

$$\Delta y = \quad +12 \quad , \quad 2$$

$$\Delta^2 y = \quad -10$$

$$\Delta^3 y = \text{toujours } 6.$$

Partant de là, on peut former les valeurs successives de $\Delta^2 y$, puis de Δy, puis enfin toutes les valeurs successives de y.

$$y = -13 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad -1 \quad 7 \quad 29$$

$$\Delta y = \dots \quad +12 \quad 2 \quad -2 \quad 0 \quad 8$$

$$\Delta^2 y = \dots \quad -10 \quad -4 \quad +2 \quad 8 \quad 14$$

$$\Delta^3 y = \dots \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6$$

on voit ainsi qu'on peut obtenir toutes les valeurs consécutives du polynôme pour des valeurs de x distantes d'une unité. Il suffit de connaître un nombre de valeurs consécutives du polynôme égal au degré du polynôme.

De même pour des valeurs équidistantes de x qui

différent d'une quantité qcq.

De la formule obtenue précédemment pour $\Delta^m y$, nous tirons

$$y_m = \Delta^m y + m\, y_{m-1} - \frac{m(m-1)}{1.2}\, y_{m-2} + \cdots \mp m y_1 \pm y$$

formule qui donne y_m en fonction des valeurs précédentes et de la m^e. dérivée.

---

appliquons la formule qui donne $\Delta^m y$ en fonction de y_m y_{m-1} .. à la fonction $y = x^n$. Nous aurons :

$$y_m = (x+m) \qquad y_{m-1} = x + (m-1)h, \;\ldots$$

$$\Delta^m . x^n = (x+mh)^n - m\{x+(m-1)h\}^n + \frac{m(m-1)}{1.2}\{x+(m-2)h\}^n + \cdots$$
$$\pm m(x+h)^n \mp m x^n$$

Si nous supposons $m = n$, la formule devra donner

$$\Delta^n . x^n = 1.2.3\ldots n . h^n$$

Les x doivent donc disparaître du second membre et nous pouvons leur donner une valeur qcq. Faisons donc $x = 0$. Il vient

$$1.2.3\ldots n = n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n \ldots \pm n$$

formule curieuse, et dont on fait usage dans la théorie des Nombres.

Si au contraire on fait $m > n$, $\Delta^m x^n$ est nul, quel que soit x. On doit donc avoir

$$m^n - n(m-1)^n + \ldots = 0$$

quels que soient m et n, pourvu que m soit plus grand que n.

Soit donnée la fonction

$$y = a^x$$

et cherchons l'expression de $\Delta^m y$. On a

$$\Delta y = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1)$$

on en déduit immédiatement

$$\Delta^m y = \Delta^m . a^x = (a^h-1)^m a^x$$

quel que soit a.

Prenons la fonction

$$y = \text{Log}\, x$$

le log. étant pris dans une base qcq. on aura

$$\Delta y = \Delta \text{Log}\, x = \text{Log}(x+h) - \text{Log}(x) = \text{Log}\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$\Delta^2 y = \text{Log}(x+2h) - 2\,\text{Log}(x+h) + \text{Log}(x)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Log}(x+2h) - 2\,\text{Log}(x+h) + \text{Log}\,x \\ -\ \text{Log}\,x \quad + 2\,\text{Log}\,x \quad - \text{Log}\,x \end{array} \right.$$

$$= \text{Log}\left(1 + \frac{2h}{x}\right) - 2\,\text{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

et, en développant en Série,

$$\Delta^2 y = -M\left(\frac{h^2}{x^2} - 2\frac{h^3}{x^3} \cdots\cdots\right)$$

M étant le module.

On aura en général

$$\Delta^m \text{Log}\,x = \text{Log}(x+mh) - m\,\text{Log}\{x+(m-1)h\} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\text{Log}\{x+(m-2)h\}$$

$$\cdots\cdots \pm m\,\text{Log}(x+h) \mp \text{Log}\,x$$

ce qu'on peut écrire

$$\Delta^m \text{Log}\,x = \left\{ \begin{array}{l} \text{Log}(x+mh) - m\,\text{Log}\{x+(m-1)h\} + \cdots \mp \text{Log}\,x \\ -\ \text{Log}\,x \quad + m\,\text{Log}\,x \quad - \frac{m(m-1)}{1.2}\,\text{Log}\,x \cdots \pm \text{Log}\,x \end{array} \right\}$$

et toute la seconde ligne que j'ajoute ainsi est nulle d'elle-même. — Mais alors Δ^m Log x peut s'écrire

$$\Delta^m \text{Log}\,x = \text{Log}\left(1 + \frac{mh}{x}\right) - m\,\text{Log}\left\{1 + \frac{(m-1)h}{x}\right\}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\,\text{Log}\left\{1 + \frac{(m-2)h}{x}\right\} + \cdots \pm \text{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

Développons les Log. du 2°. membre en Série, nous aurons

$$\mathcal{L}\left(1+\frac{mh}{x}\right) = \frac{mh}{x} - \frac{1}{2}\frac{m^2h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{m^3h^3}{x^3} \cdots \mp \frac{1}{n}\frac{m^nh^n}{x^n} \pm \cdots$$

$\mp$ si n est pair ou impair. — De même

$$\mathcal{L}\left(1+\frac{(m-1)h}{x}\right) = \frac{(m-1)h}{x} - \frac{1}{2}\frac{(m-1)^2h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{(m-1)^3h^3}{x^3} \cdots \mp \frac{1}{n}\frac{(m-1)^nh^n}{x^n} \pm \cdots$$

$$\mathcal{L}\left(1+\frac{(m-2)h}{x}\right) = \frac{(m-2)h}{x} - \frac{1}{2}\frac{(m-2)^2h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{(m-2)^3h^3}{x^3} \cdots \mp \frac{1}{n}\frac{(m-2)^nh^n}{x^n} \pm \cdots$$

. . . .

$$\mathcal{L}\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} \cdots \mp \frac{1}{n}\frac{h^n}{x^n} \pm \cdots$$

Faisons la somme de ces différentes quantités en les multipliant par les coefficients indiqués dans le développement de $\Delta^m \operatorname{Log} x$, et en ayant soin d'additionner ensemble les termes qui contiennent les mêmes puissances de $\frac{h}{x}$. — Il est aisé de voir que, dans cette somme, on aura pour terme contenant $\left(\frac{h}{x}\right)^n$

$$\pm\frac{1}{n}\frac{h^n}{x^n}\left\{m^n - \frac{m}{1}(m-1)^n + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^n \cdots \pm n\right\}$$

et, dans cette expression, il faut faire successivement $n = 1, 2, 3 \ldots$ et faire la somme de toutes ces quantités. Or nous avons entre parenthèses une quantité qui, pour $m > n$, est constamment nulle d'après un théorème précédemment démontré, et qui, pour $m < n$, est constamment égale à $1.2 \ldots n$. On voit donc que, dans la somme en question, on n'aura les puissances de $\frac{h}{x}$ qu'à partir de la m^e. Nous aurons alors

$$\Delta^m \operatorname{Log} x = \pm\frac{1}{m}\frac{h^m}{x^m}(1.2\ldots m) \pm \frac{1}{m+1}\frac{h^{m+1}}{x^{m+1}}\left\{m^{m+1} - m(m-1)^{m+1} \cdots \mp m\right\}$$
$$\pm \frac{1}{m+2}\frac{h^{m+2}}{x^{m+2}}\left\{m^{m+2} - m(m-1)^{m+2} \cdots \mp m\right\}$$

etc.

et l'on voit que, dès que $\frac{h}{x}$ sera une quantité suffisamment petite, on pourra calculer $\Delta^m \operatorname{Log} x$ en considérant seulement un très-petit nombre des séries qui composent le second membre, et l'on pourra ainsi l'obtenir avec une grande approximation.

Posons encore

$$y = \sin(ax+b)$$

Nous en tirerons

$$\Delta y = \sin(ax+b+ah) - \sin(ax+b)$$

$$= 2 \sin\frac{ah}{2} \cos\left(ax + \frac{ah}{2} + b\right)$$

Soit fait de même

$$y = \cos(ax+b)$$

on en tirera

$$\Delta y = \cos(ax+ah+b) - \cos(ax+b)$$

$$= -2 \sin\frac{ah}{2} \sin\left(ax + \frac{ah}{2} + b\right)$$

au moyen de ces deux formules, on obtiendra

$$\Delta^2 \sin(ax+b) = 2 \sin\frac{ah}{2} \left\{\cos\left(ax + \frac{3}{2}ah + b\right) - \cos(ax+ah+b)\right\}$$

$$= -4 \sin^2\frac{ah}{2} \sin(ax+ah+b)$$

et en général

$$\Delta^{2n} \sin(ax+b) = \pm 2^{2n} \left(\sin\frac{ah}{2}\right)^{2n} \sin(ax+nah+b)$$

$$\Delta^{2n+1} \sin(ax+b) = \pm 2^{2n+1} \left(\sin\frac{ah}{2}\right)^{2n+1} \cos\left(ax+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)ah+b\right)$$

les signes supérieurs devant être pris quand n est pair, et les signes inférieurs quand n est impair.

Résultat semblable pour les Cosinus.

Etablissons une formule importante, on a d'après ce qui précède

$$\Delta^{2n} \sin(ax+b) = \pm \left(2 \sin \frac{ah}{2}\right)^{2n} \sin(ax+b+nha)$$

le signe + correspondant au cas de n pair.

$$\Delta^{2n+1} \sin(ax+b) = \left(2 \sin \frac{ah}{2}\right)^{2n+1} \cos\left(ax+b+nah+\frac{ah}{2}\right)$$

$$\Delta^{2n+2} \sin(ax+b) = \left(2 \sin \frac{ah}{2}\right)^{2n+2} \sin(ax+b+nah+ah)$$

Eliminons entre ces trois éq. l'indice n, et, pour plus de commodité, posons

$$\begin{cases} ax+b+nah = \alpha \\ 2 \sin \frac{ah}{2} = \beta \end{cases}$$

Les éq. deviennent

$$\begin{cases} \Delta^{2n} = b^{2n} \sin\alpha \\ \Delta^{2n+1} = b^{2n+1} \left\{ \cos\alpha \cos\frac{ah}{2} - \sin\alpha \sin\frac{ah}{2} \right\} \\ \Delta^{2n+2} = b^{2n+2} \left\{ \sin\alpha \cos ah + \sin ah \cos\alpha \right\} \end{cases}$$

Remplacer partout b par β.

et, entre ces éq. éliminons α. En vertu de la première éq. la 2e. et la 3e. peuvent s'écrire

$$\begin{cases} \Delta^{2n+1} = b^{2n+1} \cos\frac{ah}{2} \cos\alpha - b \sin\frac{ah}{2} \Delta^{2n} \\ \Delta^{2n+2} = -\left\{ b^{2n+2} \sin ah \cos\alpha + b^2 \cos ah \, \Delta^{2n} \right\} \end{cases}$$

Eliminant $\cos l$ entre ces deux Eq. b^{2n+1} disparait de lui-même, et il reste

$$\Delta^{2n+2} = -\left\{\beta^2 \cos ah\, \Delta^{2n} + \frac{\beta \sin ah}{\cos \frac{ah}{2}}\left(\Delta^{2n+1} + \beta \sin \frac{ah}{2}\, \Delta^{2n}\right)\right\}$$

$$= -\left\{\beta^2 \Delta^{2n}\left(\cos ah + 2 \sin^2 \frac{ah}{2}\right) + \beta^2 \Delta^{2n+1}\right\}$$

Il est aisé de voir que la quantité entre parenthèses est $\cos^2 \frac{ah}{2} + \sin^2 \frac{ah}{2}$ ou 1. Par suite

$$\Delta^{2n+2} = -\beta^2 \left\{\Delta^{2n} + \Delta^{2n+1}\right\}$$

$$\Delta^{2n+2} = -4 \sin^2 \frac{ah}{2} \left\{\Delta^{2n} + \Delta^{2n+1}\right\}$$

Supposons qu'on ait en général

$$y = f(x)$$

Nous avons

$$y_m = f(x + m\,\Delta x)$$

or, d'après ce que nous avons vu ;

$$y_m = y + m\,\Delta y + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\Delta^n y + \cdots + \Delta^m y$$

Si l'on fait croître m indéfiniment, à moins que les termes du développement ne soient nuls à partir d'un certain terme, comme pour les fonctions algébriques entières, le nombre des termes du développement croîtra au-delà de toutes limites.

Nous avons $h = m\,\Delta x$: d'où $m = \frac{h}{\Delta x}$. Substituant, nous aurons

$$Y_m \text{ ou } f(x+h) = y + h\,\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1.2}\,\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \cdots + \frac{h(h-\Delta x)\cdots(h-(n-1)\Delta x)}{1.2\ldots n}\,\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} + \cdots$$

Prenons un nombre constant de termes à partir du premier, et supposons qu'on fasse croître Δx vers zéro. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ converge vers une certaine limite qu'on désigne par $\frac{dy}{dx}$; $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ converge vers la limite $\frac{d^n y}{dx^n}$, et il vient

$$f(x+h) = f(x) + \frac{dy}{dx}\,\frac{h}{1} + \frac{d^2 y}{dx^2}\,\frac{h^2}{1.2} + \cdots + \frac{d^n y}{dx^n}\,\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \cdots$$

et cette formule sera convergente dans le cas où la première l'était. – Nous avons ainsi la Série de Taylor. – Néanmoins la manière dont nous y arrivons laisse à désirer, parce que nous ne nous sommes pas occupés de la convergence de la première série.

Nous allons établir une dernière formule qui donne la différence m^e. au moyen des dérivées successives de la fonction. – Soit

$$y = f(x)$$

la fonction donnée.

Nous avons

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = h\,\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\,\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{h^3}{3!}\,\frac{d^3 y}{dx^3} + \cdots$$

$$\Delta^2 y = \Delta\,.\,\Delta y$$

Pour avoir le développement de $\Delta^2 y$, il faut donc mettre Δy au lieu de y dans le développement de Δy: et il vient

$$\Delta^2 y = h\left\{h\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots\right\}$$

$$+\frac{h^2}{2!}\left\{h\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^4y}{dx^4} + \cdots\right\}$$

$$+ \text{etc.}$$

Nous voyons que, dans le développement de $\Delta^2 y$ chaque dérivée est multipliée par une puissance de h égale à l'indice de la dérivée.

En général, si nous avons

$$\Delta^n y = A h^n \frac{d^n y}{dx^n} + B h^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \cdots$$

pour avoir $\Delta^{n+1} y$, il faudra, dans l'expression de Δy obtenue ci-dessus, remplacer y par $\Delta^n y$, et il est aisé de voir que, dans le développement, chaque dérivée de y est multipliée par une puissance de h égale à l'indice de la dérivée. — Cette loi des coefficients, si elle est vraie pour $\Delta^n y$, est donc vraie pour $\Delta^{n+1} y$, par suite, comme nous l'avons vérifiée pour Δy et $\Delta^2 y$, elle est générale. — De plus, on peut remarquer que la première dérivée entrant dans la n^e. différence est la n^e. dérivée. — $\Delta^n y$ sera donc de la forme

$$\Delta^n y = A h^n \frac{d^n y}{dx^n} + B h^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + C h^{n+2}\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + \cdots$$

Reste à trouver $A, B, C \ldots$ or remarquons que les valeurs de ces coefficients sont tout-à-fait indépendantes de la forme de la fonction y. Pour avoir ces coefficients, il suffira donc de mettre pour y une fonction déterminée qui permette de les calculer commodément.

La fonction la plus commode à choisir à cet effet est la fonction $y = e^x$. on sait que

$$\Delta^n e^x = e^x (e^h - 1)^n$$

de plus on a

$$\frac{d^m y}{dx^m} = e^x$$

Si nous substituons dans la formule précédente, et supprimons le facteur commun e^x, il vient identiquement

$$(e^h - 1)^n = A h^n + B h^{n+1} + C h^{n+2} + \ldots$$

ou en développant

$$A h^n + B h^{n+1} + C h^{n+2} + \ldots = \left(\frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots \right)^n$$

$$= h^n \left(1 + \frac{h}{1.2} + \frac{h^2}{1.2.3} + \ldots \right)^n$$

ou

$$A + B h + C h^2 + \ldots = \left(1 + \frac{h}{1.2} + \frac{h^2}{1.2.3} + \ldots \right)^n$$

Identifiant les coefficients des mêmes puissances de h dans les deux membres, on aura les valeurs successives de $A, B, C \ldots$

Application du Calcul des Différences à l'Interpolation.

Le Problème de l'Interpolation consiste en ceci : connaissant les valeurs d'une fonction pour certaines valeurs de la variable, trouver des valeurs de la fonction pour des valeurs intermédiaires de la fonction.

Le problème, au point de vue Géométrique, consisterait en ceci : connaissant un certain nombre de points suffisam-ment rapprochés d'une courbe, faire passer une courbe par ces points.

Nous allons résoudre ce problème analytiquement.

Nous connaissons par hypothèse les valeurs de la fonction pour les valeurs

$$x_0 \quad x_0+h \quad \ldots \quad x_0+nh$$

de la variable. — Nous pouvons déterminer les différences $\Delta y,\ \Delta^2 y,\ \Delta^3 y, \ldots \Delta^n y$. — on a en général

$$u_n = u + n\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{(n)(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \ldots + \Delta^n u$$

au moyen de cette formule, nous aurons, en posant $n = \frac{x-x_0}{h}$:

$$y_n = y_0 + \frac{x-x_0}{1}\frac{\Delta y}{h} + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{1.2}\frac{\Delta^2 y}{h^2} + \ldots + \Delta^n y$$

Cette fonction y_n jouit de la propriété, quand on y fait $x = x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h, \ldots x_0+nh$, de donner les n valeurs connues de y.

Cette formule résout donc le problème proposé d'une manière approchée, puisqu'elle représente une courbe passant par les n points donnés.

Le problème était indéterminé, et l'on pouvait demander que la courbe eût une forme particulière. Ici, nous avons une courbe algébrique répondant à la question.

Cette méthode pourrait aussi servir à construire plus commodément la courbe représentée par une Eq. $y = f(x)$. Pour cela, il faudrait calculer aussi exactement que possible n valeurs de y répondant à des valeurs équidistantes de x, et substituer dans la formule ci-dessus. On aurait une courbe algébrique qui représenterait approximativement la courbe donnée $y = f(x)$.

Supposons actuellement qu'on ait une fonction de la forme

$$u = x(x+h)(x+2h)\ldots\{x+(n-1)h\}$$

et cherchons la différence Δu de cette fonction. — Par le changement de x en $x+h$, le premier facteur se change dans le second, le second dans le troisième, etc. et l'on voit que, dans la fonction proposée et dans ce qu'elle devient pour $x+h$, il y aura un facteur commun. Nous aurons ainsi,

$$\Delta u = (x+h)(x+2h)\ldots\{x+(n-1)h\}.nh$$

De même

$$\Delta^2 u = (x+2h)(x+3h)\ldots\{x+(n-1)h\}.n(n-1)h^2$$

. . . .

Il y a une autre sorte de fonction, inverse de la précédente, dont il est bon de connaître la différence.

$$u = \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+\{n-1\}h)}$$

on aura

$$\Delta u = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots\{x+(n-1)h\}(x+nh)} - \frac{1}{x(x+h)\ldots\{x+(n-1)h\}}$$

$$\Delta u = \frac{-nh}{x(x+h)(x+2h)\ldots\{x+(n-1)h\}(x+nh)}$$

De même on trouvera $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$ … car Δu est une fonction de même forme que u.

Probleme Inverse des Différences.

Ce Probleme Inverse consiste à trouver la fonc-tion ayant pour différence d'un ordre déterminé une fonc-tion donnée.

Remarquons d'abord que, si nous connaissions une fonction satisfaisant à la question, c.a.d. ayant pour diffé-rence la fonction donnée, on pourrait l'augmenter d'une constante, et elle satisferait encore à la question. — Cette constante n'est pas à proprement parler une quantité indépendante de la variable x, mais une fonction de x qui ne croît pas quand x croît de h. — on doit donc enten-dre par cette constante une fonction d'x, périodique, et dont la période soit h. — Nous entendons donc en somme par constante une fonction qui a pour différence 0 quand x croît de h.

Une fonction qcq. de la forme

$$F\left(\sin\frac{2n\pi x}{h}, \cos\frac{2n\pi x}{h}\right)$$

rentrerait dans cette catégorie de fonctions que nous appelons constantes.

Quand la différence donnée est composée de la somme de plusieurs autres fonctions, pour trouver la fonction dont c'est la différence, il suffit de cher-cher les fonctions dont chacun des termes est la diffé-

-rence, d'en faire la somme, et d'ajouter à cette somme une constante arbitraire entendue comme ci-dessus.

On désigne souvent par le signe Σ, inverse de Δ, la fonction dont la différence a été désignée par Δ.

Considérons le cas des fonctions algébriques. — D'après la remarque faite précédemment, il suffit de considérer une fonction de la forme Ax^m, ou même de la forme x^m. Or nous avons trouvé

$$\Delta x^{m+1} = \frac{m+1}{1} x^m h + \frac{(m+1)m}{1.2} x^{m-1} h^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} x^{m-2} h^3 + \cdots + h^{m+1}$$

donc

$$x^{m+1} = (m+1)h\,\Sigma x^m + \frac{(m+1)m}{1.2} h^2 \Sigma x^{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} h^3 \Sigma x^{m-2} + \cdots + h^{m+1} \Sigma 1.$$

De là

$$\frac{x^{m+1}}{(m+1)h} = \Sigma x^m + \frac{mh}{1.2} \Sigma x^{m-1} + \frac{m(m-1)h^2}{1.2.3} \Sigma x^{m-2} + \cdots + \frac{h^m}{m+1} \Sigma 1.$$

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \frac{mh}{2} \Sigma x^{m-1} - \frac{m(m-1)h^2}{1.2.3} \Sigma x^{m-2} - \cdots - \frac{h^m}{m+1} \Sigma 1.$$

formule qui ramène Σx^m aux sommes d'expressions semblables où x entre avec des exposants moindres.

Faisons successivement $m = 0, 1, 2 \ldots$

on trouve

$m=0 \qquad \Sigma 1 = \frac{x}{h} + C$

$m=1 \qquad \Sigma x = \frac{x^2}{2h} - \frac{x}{2} + C$

$m=2 \qquad \Sigma x^2 = \frac{x^3}{3h} - h\left(\frac{x^2}{2h} - \frac{x}{2}\right) - \frac{h^2}{3}\frac{x}{h} = \frac{x^3}{3h} - \frac{x^2}{2} + \frac{hx}{6} + C$

$m=4 \qquad \Sigma x^3 = \frac{x^4}{4h} - \frac{x^3}{2} + \frac{hx^2}{4} + C$

Ces formules, comme on voit, sont beaucoup plus compliquées que les intégrales des fonctions différentielles correspondantes.

Applications du Calcul des Différences à la Sommation des Séries.

Une Série peut toujours se représenter par

$$\varphi(0) + \varphi(h) + \varphi(2h) + \dots + \varphi(x) + \dots$$

c'est là une série dont le terme général est $\varphi(x)$. — Représentons la somme des termes par

$$S.\,\varphi(x)$$

Si nous changeons dans cette somme x en $x+h$, elle devient

$$\varphi(0) + \varphi(h) + \dots + \varphi(x) + \varphi(x+h) + \dots$$

La différence de ces deux expressions est $\varphi(x+h)$. La somme $S.\varphi(x)$ est donc telle que sa différence est $\varphi(x+h)$. donc

$$\Delta.\,S\varphi(x) = \varphi(x+h)$$

Pour avoir $S.\varphi(x)$, il faut donc déterminer $\Sigma\,\varphi(x+h)$. on aura

$$\Sigma.\,\varphi(x+h) = S\,\varphi(x) + C$$

C étant une constante telle qu'on les a définies dans le calcul des Différences.

Il ne restera plus, pour achever la solution de la question, qu'à déterminer la constante C. La sommation des termes est donc ramenée à une

question du calcul inverse des différences.

Si nous représentons la série à sommer par

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_x + \cdots$$

on aura évidemment

$$\varphi(x) = u_x \qquad h = 1$$

Il est facile de voir d'ailleurs que l'on peut écrire

$$\Sigma' \varphi(x+h) + C = S\,\varphi(x) = \Sigma\,\varphi(x) + \varphi(x) + C$$

---

appliquons cela à quelques exemples.

Supposons $\varphi(x)$ de la forme

$$\varphi(x) = x^m$$

La série est, en supposant $h = 1$,

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + x^m$$

Supposons d'abord $m = 1$, et par conséquent $\varphi(x) = x$. La série est

$$1 + 2 + 3 + \cdots + x$$

on voit tout de suite que c'est une progression par différence. on a, d'après ce que nous avons vu,

$$\Sigma\,\varphi(x) = \Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x$$

$$S\,\varphi(x) = S.x = 1+2+3+\cdots+x = \frac{(x)(x+1)}{1.2} + C$$

déterminons la constante. Pour cela, remarquons que, quand on fait $x = 0$, le premier membre s'an-

nulle. Donc $C=0$.

Faisons $\varphi(x)=x^2$. on a

$$S\,\varphi(x) = 1+4+9+\dots+x^2$$

$$S\,x^2 = \Sigma x^2 + x^2 + C$$

or

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

Donc

$$S x^2 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + C$$

En faisant $x=0$, on voit aisément qu'on doit avoir $C=0$. — Si nous réduisons au même dénominateur, nous pourrons écrire

$$S x^2 = \frac{2x^3+3x^2+x}{1.2.3} = \frac{x(2x^2+3x+1)}{1.2.3} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{1.2.3}$$

Supposons encore $\varphi(x)=x^3$. on a

$$S\,\varphi(x) = 1+8+27+\dots+x^3$$
$$= \Sigma x^3 + x^3 + C$$

or

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^2}{4}$$

Donc

$$S x^3 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} + C$$

on verra aisément que $C=0$, et d'ailleurs on peut écrire, en réduisant au même dénominateur :

$$S x^3 = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$$

on trouverait de même

$$Sx^4 = 1 + 16 + \cdots + x^4 = \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}$$

Passons à quelques autres applications.

Nous avons trouvé antérieurement

$$\Delta \{x(x+h)\cdots(x+(n-1)h)\} = (x+h)(x+2h)\cdots(x+(n-1)h)\,nh$$

d'où l'on tire

$$\Sigma (x+h)(x+2h)\cdots(x+(n-1)h)\,nh = x(x+h)(x+2h)\cdots(x+(n-1)h) + C$$

$$\Sigma (x+h)(x+2h)\cdots(x+(n-1)h) = \frac{1}{nh}\,x(x+h)(x+2h)\cdots(x+(n-1)h) + C$$

Changeons n en $n+1$ pour simplifier l'écriture.

$$\Sigma (x+h)(x+2h)\cdots(x+nh) = \frac{1}{(n+1)h}\,x(x+h)\cdots(x+nh) + C$$

Cela posé, prenons le cas où, dans une série à sommer, l'on ait

$$\varphi(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+m)$$

La série serait

$$1.2.3\ldots n + 2.3\ldots(n+1) + 3.4\ldots(n+2) + \cdots\cdots$$

Nous aurons, d'après ce qui a été vu précédemment, pour somme de cette série, en remarquant que $h = 1$:

$$S(x+1)(x+2)\cdots(x+m) = \Sigma (x+2)(x+3)\cdots(x+m+1) + C$$

or, d'une formule rappelée précédem^t. nous tirons

$$\Sigma (x+2)(x+3)\cdots(x+m+1) = \frac{1}{m+1}(x+1)(x+2)\cdots(x+m+1) + C$$

donc

$$S(x+1)(x+2)\cdots(x+m) = \frac{1}{m+1}(x+1)(x+2)\cdots(x+m+1)$$

car il est facile de voir que la constante C doit être nulle.

Nous avons trouvé

$$\Delta \frac{1}{x(x+h)\cdots(x+\{n-2\}h)} = \frac{-(n-1)h}{x(x+h)\cdots(x+(n-1)h)}$$

donc

$$\Sigma \frac{1}{x(x+h)\cdots\{x+(n-1)h\}} = -\frac{1}{(n-1)h}\,\frac{1}{x(x+h)\cdots\{x+(n-2)h\}} + C$$

Cherchons d'après cela

$$S \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

cette expression est la somme des termes de la série

$$\frac{1}{1.2\cdots\cdots n} + \frac{1}{2.3\cdots(n+1)} + \cdots\cdots + \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

On trouve aisément, par la même méthode que tout-à-l'heure,

$$S\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+n)} + C$$

et, en faisant $x=0$, on voit que

$$C = \frac{1}{1.2\cdots(n-2)\,(n-1)^2}$$

La formule est en défaut quand $n=1$.

Supposons encore

$$\varphi(x) = \sin(ax+b)$$

La Série sera

$$\sin b + \sin(b+ah) + \sin(b+2ah) + \cdots + \sin(ax+b)$$

on a, d'après ce que nous avons vu,

$$S\,\varphi(x) = S.\sin(ax+b) = \Sigma.\sin(ax+b+ah) + C$$

or le calcul des différences donne

$$\Sigma \sin(ax+b) = -\frac{1}{2\sin\frac{ah}{2}}\cos\left(ax+b-\frac{ah}{2}\right)$$

Pour avoir $\Sigma \sin(ax+b+ah)$, changeons dans cette relation x en $x+h$: il vient

$$\Sigma.\sin(ax+b+ah) = -\frac{1}{2\sin\frac{ah}{2}}\cos\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right)$$

donc

$$S.\sin(ax+b) = -\frac{1}{2\sin\frac{ah}{2}}\cos\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right) + C$$

Pour $x=0$, on trouve

$$\sin b = C - \frac{1}{2\sin\frac{ah}{2}}\cos\left(b+\frac{ah}{2}\right)$$

$$C = \frac{2\sin b\sin\frac{ah}{2} + \cos\left(b+\frac{ah}{2}\right)}{2\sin\frac{ah}{2}}$$

$$= \frac{2\sin b\sin\frac{ah}{2} + \cos b\cos\frac{ah}{2} - \sin b\sin\frac{ah}{2}}{2\sin\frac{ah}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(b-\frac{ah}{2}\right)}{2\sin\frac{ah}{2}}$$

Substituant, il vient pour la somme de la série,

$$S.\sin(ax+b) = -\frac{1}{2\sin\frac{ah}{2}}\cos\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right) + \cos\left(b-\frac{ah}{2}\right)\frac{1}{2\sin\frac{ah}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{ah}{2}}\sin\left(\frac{ax}{2}+\frac{ah}{2}\right)\sin\left(\frac{ax}{2}+b\right)$$

on trouverait par les mêmes procédés

$$S.\cos(ax+b) = \frac{1}{\sin\frac{ah}{2}}\sin\left(\frac{ax}{2}+\frac{ah}{2}\right)\cos\left(\frac{ax}{2}+b\right)$$

Développement d'une fonction périodique en série trigonométrique.

Nous allons nous occuper des séries susceptibles de représenter des fonctions périodiques quelconques.

La forme d'une telle série est

$$K + A\sin x + B\cos x + A_2\sin 2x + B_2\cos 2x + \dots + A_n\sin nx + B_n\cos nx + \dots$$

Il est évident que la série conserve la même valeur quand on y change x en $x + 2k\pi$, et en particulier x en $x+2\pi$, le sinus et le cos. reprennent les mêmes valeurs, et par conséquent la fonction de x que représente cette série reprend aussi la même valeur. Cette fonction est donc une fonction périodique dont la période est 2π.

Pour arriver à la sommation de cette série, rappelons d'abord la formule trigonométrique

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos mu = \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}$$

que nous pouvons écrire, en posant $u = x - \alpha$,

$$\frac{1}{2} + \cos(x-\alpha) + \cos.2(x-\alpha) + \dots + \cos.m(x-\alpha) = \frac{\sin.\left(m+\frac{1}{2}\right)(x-\alpha)}{2\sin.\frac{1}{2}(x-\alpha)}$$

Multiplions les deux membres par $F(\alpha)$, F désignant une fonction qcq. et intégrons entre les deux limites arbitraires a et b. Nous aurons encore identiquement :

$$\frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha + \int_a^b F(\alpha)\cos(x-\alpha)\,d\alpha + \cdots + \int_a^b F(\alpha)\cos m(x-\alpha)\,d\alpha = \int_a^b F(\alpha)\frac{\sin.(m+\frac{1}{2})(x-\alpha)}{2\sin}\,d\alpha$$

Il est évident que les différents termes du premier membre ne dépendront aucunement de α, mais seulement de x, de la forme de la fonction F, et des limites a et b.

Le terme général du premier membre est de la forme

$$A_n \sin nx + B_n \cos nx$$

et si nous supposons que m augmente indéfinimt. le 1er membre convergera vers la série dont nous voulons avoir la somme. Pour avoir cette somme, il faut donc chercher la limite vers laquelle converge vers le second membre quand m augmente indéfiniment.

Or supposons dans le second membre m très-grand, en sorte qu'une très-petite variation de α occasionne une très-grande variation dans $(m+\frac{1}{2})(x-\alpha)$. Le sinus de cet arc a donc passé par toutes les valeurs depuis -1 jusqu'à $+1$. Au contraire, $F(\alpha)$ a varié très-peu, ainsi que $\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)$. Il résulte de là que la fraction

$$\frac{F(\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)}$$

a très-peu varié, pourvu toutefois que le dénominateur ne soit pas très-petit, c.a.d. pourvu que l'on ne suppose pas $x-\alpha$ très-voisin de $\pm 2n\pi$. Or, pour toutes les valeurs de α pour lesquelles $x-\alpha$ ne sera pas voisin de $2n\pi$, l'intégrale du 2e. membre reviendra donc à celle-ci

$\int_a^b \sin(m+\frac{1}{2})(x-\alpha).d\alpha$ multipliée par une constante, intégrale qui est nulle, parce que ses éléments se détruisent deux à deux.

Si donc il n'y a pas dans l'intervalle de a à b de valeur de α pour laquelle $x - \alpha = \pm 2n\pi$, l'intégrale sera nulle. S'il y a de pareilles valeurs, il faut une discussion particulière.

Nous pouvons donc nous borner à considérer les cas où $x - \alpha$ est très près de 0 (en supposant $b - a < 2\pi$). Posons

$$\alpha = x + \omega$$

ω étant une quantité très petite susceptible de varier de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, ε étant très près de 0. Nous aurons à chercher la valeur de l'expression

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(x+\omega)\,\frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{2\sin\frac{1}{2}\omega}\,d\omega$$

nous supposons la fonction F une fonction continue, mais pouvant du reste se composer d'une suite de branches de courbes géométriquement différentes.

$F(x+\omega)$ diffère très peu de $F(x)$, et par conséquent je puis regarder $F(x+\omega)$ comme indépendant de ω, et le faire sortir du signe $\int$. Je puis donc écrire l'expression précédente :

$$F(x)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega\,d\omega}{2\sin\frac{1}{2}\omega}$$

or d'abord le rapport $\sin\frac{1}{2}\omega : \frac{1}{2}\omega$ a pour limite l'unité : et comme je dois supposer dans l'expression que ω converge vers zéro, je puis remplacer $2\sin\frac{1}{2}\omega$ par ω, et par conséquent écrire, au lieu de l'expression précédente,

$$F(x)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})\omega}{\omega}\,d\omega$$

Mais maintenant, si l'on ne suppose plus que ω reste entre les limites $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, les éléments de l'intégrale, pour les valeurs de ω en dehors de ces limites se détruiront

on peut donc supposer sans changer l'expression que les limites $-\varepsilon$, $+\varepsilon$ s'étendent autant qu'on voudra, et par conséquent nous pouvons remplacer ces limites par $-\infty$, $+\infty$. L'expression revient donc à

$$F(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\omega \cdot \frac{d\omega}{\omega}$$

or l'intégrale de cette expression est connue : c'est π. Par conséquent notre expression se réduit à $\pi F(x)$. Donc

$$\frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha + \sum_1^\infty \int_a^b F(\alpha)\cos m(x-\alpha)\,d\alpha$$

ou

$$\frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha + \sum_1^\infty \int_a^b F(\alpha)\left\{\cos mx \cos m\alpha + \sin mx \sin m\alpha\right\}d\alpha$$

ou enfin

$$\frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha + \sum_1^\infty \left\{\cos mx\int_a^b F(\alpha)\cos m\alpha\,d\alpha + \sin mx\int_a^b F(\alpha)\sin m\alpha\,d\alpha\right\}$$

a pour valeur $\qquad 2\pi F'(x)$.

Ce que nous pouvons écrire encore, en posant

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_a^b F(\alpha)\sin m\alpha\,d\alpha \qquad B_m = \frac{1}{\pi}\int_a^b F(\alpha)\cos m\alpha\,d\alpha$$

de cette manière :

$$F(x) = A + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \left\{A_m \sin mx + B_m \cos mx\right\}$$

$$= A + \frac{1}{\pi}\left\{(A_1 \sin x + B_1 \cos x) + (A_2 \sin 2x + B_2 \cos 2x) + \cdots\right\}$$

Si l'on supposait que x fût précisément égal à une des limites, ω, dans notre raisonnement ci-dessus, ne pourrait plus varier que de 0 à ε, au lieu de varier de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$. On en conclura aisément que, pour ce cas exceptionnel, la série donne pour $F(x)$ la demi-somme de ses valeurs extrêmes. De même on verra que, si, en un point, $F(x)$ passe brusquement d'une valeur à une autre qui en diffère d'une quantité finie,

la série donne la demi-somme des valeurs de la fonction en ce point.

Ordinairement, on admet que les deux limites diffèrent de 2π, et, pour ces deux limites, on prend 0 et 2π, ou $-\pi$ et $+\pi$: et l'on écrit

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\cos m(x-\alpha)\,d\alpha$$

Cela revient à supposer que, dans la partie de cet intervalle qui n'est pas compris entre a et b, la fonction $F(x)$ est nulle.

Transformons cette série en une autre où la variable x ne soit plus astreinte à rester entre a et b ou $-\pi$ et $+\pi$. Pour cela, on pose

$$x = y\,\frac{\pi}{l} \qquad \alpha = \beta\,\frac{\pi}{l}$$

La série devient

$$F\left(\frac{\pi y}{l}\right) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right)d\beta + \frac{1}{l}\sum_1^{\infty}\int_{-l}^{+l} F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right)\cos m\frac{\pi}{l}(y-\beta)\,d\beta$$

ou, en posant

$$F\left(\frac{\pi y}{l}\right) = \varphi(y)$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}\varphi(\beta)\,d\beta + \frac{1}{l}\sum_1^{\infty}\int_{-l}^{+l}\varphi(\beta)\cos\frac{m\pi}{l}(y-\beta)\,d\beta$$

et la fonction arbitraire $\varphi(y)$ de y se trouve développée en série trigonométrique entre les limites qcq. $-l$ et $+l$. — Nous pouvons maintenant remplacer y par x, et β par α : il viendra alors, généralement :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{l}\sum_{1}^{\infty}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos\frac{m\pi}{l}(x-\alpha)\,d\alpha$$

Examinons en particulier le cas où l'on a

$$\varphi(-x) = \varphi(x)$$

Le terme général, en cosinus, de la série, est

$$\cos m\frac{\pi x}{l}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos m\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$

De o à l, $\varphi(\alpha)$ reprend les mêmes valeurs que de $-l$ à o. $\cos\frac{m\pi\alpha}{l}$ reprend aussi les mêmes valeurs. Donc le terme précédent est double de

$$\cos m\frac{\pi x}{l}\int_{0}^{l}\varphi(\alpha)\cos\frac{m\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$

au contraire, la portion du terme en sinus correspondante à la partie de l'intégrale de o à l est égale et de signe contraire à la partie de ce terme répondant à la portion de l'intégrale de $-l$ à o: et par conséquent ces termes en sinus sont nuls. Donc la série peut s'écrire alors

$$\varphi(x) = \frac{1}{l}\int_{0}^{l}\varphi(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\cos\frac{m\pi x}{l}\int_{0}^{l}\varphi(\alpha)\cos\frac{m\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$

Si au contraire on avait

$$\varphi(-x) = -\varphi(x)$$

on verrait par les mêmes procédés que la série peut s'écrire sous la forme plus simple

$$\varphi(x) = \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{l}\int_{0}^{l}\varphi(\alpha)\sin\frac{m\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

Comme application,

Supposons qu'il s'agisse de développer en série de $-l$ à $+l$ une fonction égale à -1 de $+l$ à 0, et à $+1$ de 0 à $+l$. Nous sommes dans le dernier cas, celui où $\varphi(x) = -\varphi(-x)$. — Le coefficient du terme général est

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi \alpha}{l}\, d\alpha$$

coefficient qui est égal à

$$\frac{l}{m\pi}\left(1 - \cos m\pi\right)$$

La série qui représente notre fonction sera donc

$$\varphi(x) = \sum \frac{2}{m\pi}\left(1 - \cos m\pi\right) \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{ \sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l} + \frac{1}{7}\sin\frac{7\pi x}{l} + \dots \right\}$$

Si l'on voulait développer en série une fonction égale à x de $-l$ à $+l$, c.à.d. l'ordonnée de la bissectrice de l'angle des coordonnées, on trouverait

$$x = \frac{2l}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi x}{l} + \dots \right)$$

Si l'on voulait représenter par une série une fonction égale à x de 0 à l, et à $-x$ de $-l$ à 0, on trouverait, en appelant $\psi(x)$ cette fonction, le développement suivant :

$$\psi(x) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left\{\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{l} + \dots\right\}$$

Revenons à la formule obtenue précédemment

$$F(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} F(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{l}\sum_1^{\infty}\int_{-l}^{+l} F(\alpha)\cos\frac{n\pi}{l}(x-\alpha)\,d\alpha$$

le signe $\sum_1^{\infty}$ indique qu'il faut faire la somme des termes représentés par l'expression générale que ce signe affecte, en y faisant varier n de 1 à ∞. Or, en remarquant que le premier terme du second membre peut être considéré comme provenant du terme général

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} F(\alpha)\cos\frac{n\pi}{l}(x-\alpha)\,d\alpha$$

où l'on aurait fait $n=0$, et que l'on aurait divisé par 2 ; en remarquant d'ailleurs que, quand on donne à n deux valeurs égales et de signes contraires, le cosinus conserve le même signe, l'expression précédente pourra s'écrire sous la forme

$$F(x) = \frac{1}{2l}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{-l}^{+l}\cos\frac{n\pi(x-\alpha)}{l}F(\alpha)\,d\alpha$$

Le signe $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ indiquant qu'il faut faire la somme de toutes les valeurs que prend la quantité soumise à ce signe, quand on y fait varier n par des valeurs entières de l'infini négatif à l'infini positif.

Posons

$$\frac{n\pi}{l} = p \quad , \quad \frac{\pi}{l} = \Delta p$$

~~Si nous supposons que l converge vers ∞, en Remarquant qu'alors Δp est infiniment petit, et que par suite Σ devient $\int$, nous aurons~~

~~$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Cos}$$~~

il viendra

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-l}^{+l} \text{Cos}\, p(y-\alpha)\ F(\alpha)\ d\alpha\, \Delta p$$

Si nous supposons que l converge vers ∞, en admettant que $F(x)$ reste toujours fini, et Remarquant qu'alors Δp est infiniment petit, et que, par suite, Σ devient $\int$, nous aurons

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\ \text{Cos}\, p(x-\alpha)\ d\alpha\, dp$$

formule que nous nous proposions d'Etablir.

Cette formule, comme la précédente, est due à Fourier: mais cette dernière porte plus spécialement le nom de son Inventeur.

Il y a des cas particuliers où la formule peut s'écrire d'une manière plus simple.

1°. Supposons d'abord qu'on ait

$$F(-x) = F(x)$$

quel que soit x, et voyons ce que devient la formule

de Fourier dans cette hypothèse. Pour le voir plus simplement, développons l'expression $\cos p(x-\alpha)$. La seconde intégrale pourra s'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \left\{ \cos px \cos p\alpha - \sin px \sin p\alpha \right\} d\alpha$$

ou

$$\cos px \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \cos p\alpha \, d\alpha + \sin px \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \sin p\alpha \, d\alpha$$

or, par hypothèse, pour deux valeurs de α égales et de signes contraires, $F(\alpha)$ garde la même valeur. au contraire $\sin p\alpha$ change de signe. Donc les éléments de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \sin p\alpha \, d\alpha$$

sont égaux deux à deux et de signes contraires, et par conséquent cette intégrale est nulle. — au contraire, $\cos p\alpha$ conservant la même valeur et le même signe, ainsi que $F(\alpha)$ pour deux valeurs égales et de signes contraires de la variable α, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \cos p\alpha \, d\alpha$$

est double de l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} F(\alpha) \cos p\alpha \, d\alpha$$

Donc on aura

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos px \, dp \int_{0}^{\infty} F(\alpha) \cos p\alpha \, d\alpha$$

2°. Supposons qu'on ait

$$F(-x) = -F(x).$$

on trouvera alors

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp \sin px \int_0^\infty F(\alpha) \sin p\alpha \, d\alpha$$

Faisons quelques applications très-simples de ces formules.

Proposons-nous par exemple de représenter par nos formules une fonction égale à l'unité pour les valeurs de la variable comprises entre -1 et $+1$, et nulle pour toutes les autres valeurs. — Nous sommes dans le cas de $F(\alpha) = F(-\alpha)$. Nous pouvons donc faire usage de la formule

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp \cos px \int_0^\infty F(\alpha) \cos p\alpha \, d\alpha$$

or d'abord l'intégrale

$$\int_0^\infty F(\alpha) \cos p\alpha \, d\alpha$$

peut se décomposer en deux parties, l'une prise de 0 à 1, l'autre de 1 à ∞. Cette dernière partie est nulle, puisque $F(\alpha)$ l'est dans cet intervalle. Il reste donc la partie de l'intégrale comprise entre 0 et 1, et nous pouvons écrire, en faisant du reste $F(\alpha) = 1$,

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp \cos px \int_0^1 \cos p\alpha \, d\alpha$$

or

$$\int_0^1 \cos p\alpha \, d\alpha = \left(\frac{\sin p\alpha}{p}\right)_0^1 = \frac{\sin p}{p}$$

donc

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dp \cos px \frac{\sin p}{p}$$

or on a

$$2 \cos px \sin p = \sin p(x+1) + \sin p(1-x)$$

donc

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dp}{p} \left\{ \sin p(x+1) + \sin p(1-x) \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{p} \sin p(x+1)\, dp + \int_0^\infty \frac{1}{p} \{ \sin p(1-x)\, dp \right\}$$

or, si $x > 1$, le second terme du second membre, d'après les principes connus, a pour valeur $-\frac{1}{2}\pi$, et le premier terme $\frac{1}{2}\pi$. La somme est nulle, donc aussi $F(x)$. Si au contraire x est < -1, le premier terme a pour valeur $-\frac{1}{2}\pi$, le second $+\frac{1}{2}\pi$, la somme est encore nulle. Si enfin l'on donne à x une valeur comprise entre $+1$ et -1, les deux intégrales ont toutes deux pour valeur $\frac{1}{2}\pi$: leur somme est π : et par suite cette somme multipliée par le coefficient $\frac{1}{\pi}$ est bien égale à l'unité. Nous vérifions ainsi que la formule ci-dessus nous représente bien la fonction proposée.

Cherchons encore à représenter par notre formule une fonction égale à e^{-x} pour toutes les valeurs positives (*)

(*) de x, et à e^{x} pour les valeurs négatives. Nous sommes encore dans le cas de $F(x) = -F(-x)$ et l'on trouvera

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos px \, dp}{1-p^2}.$$

Calcul des Probabilités.

Cours de Mr. Bertrand
à l'Ecole Normale.

Calcul des Probabilités.

On définit ordinairement les Mathématiques comme étant la Science des Grandeurs en général. Cependant toutes les Grandeurs ne peuvent figurer dans les calculs : telle semble être la Probabilité, l'espérance plus ou moins grande que l'on a de voir arriver un événement déterminé. Il est pourtant certain que c'est là une Grandeur, puisqu'elle est susceptible d'augmentation et de diminution. Mais on ne comprend guères que cette grandeur soit exprimable en nombres, non plus que certaines grandeurs analogues, la beauté, le mérite, etc. — Cependant la notion de probabilité peut devenir susceptible d'être évaluée numériquement, et de donner naissance à une théorie mathématique, qui constitue le Calcul des probabilités.

La première chose est de se faire une idée nette de l'égalité de deux grandeurs de cette espèce. Nous disons que deux probabilités sont égales, ou que deux événements ont une égale probabilité, lorsque la personne qui les attend peut se considérer comme étant dans des positions absolument identiques par rapport à ces deux événements : lorsqu'elle sera disposée à faire, sans regret ni plaisir, l'échange des avantages que lui fournirait l'un de ces événements pour ceux qu'elle pourrait retirer de l'autre.

Remarquons qu'ici on emploie nécessairement l'appréciation de la personne qui juge de la probabilité: Tel événement sera probable pour un individu, qui le sera beaucoup moins pour un autre, suivant l'état des connaissances des deux personnes. — Ainsi, ouvrons un livre au hasard: à priori nous dirons qu'il est aussi probable que la première page que nous prendrons commence par un a que par un b.

Nous ne le dirons certes plus si, d'avance, nous nous sommes assurés que, dans ce livre, il y a 100 pages qui commencent par un a contre une commençant par un b. — Ainsi la probabilité d'un événement dépend non seulement de sa nature même et des circonstances qui l'accompagnent, mais aussi de l'état des connaissances de la personne qui l'attend. — Et l'on a même été jusqu'à dire que pour celui dont les connaissances seraient complètes, la notion de probabilité disparaîtrait pour être remplacée par celle d'une certitude continuelle.

Il y a toute une classe d'événements dont on peut bien définir la probabilité. Ce sont ceux qui ne peuvent arriver que d'un nombre déterminé de manières, toutes également possibles. — Le type de cette classe d'événements est la sortie d'une certaine boule de dedans une urne qui en contient plusieurs. — Si une urne contient 25 boules différentes, la sortie d'une d'elles sera un événement qui pourra arriver seulement de 25 manières distinctes.

Supposez qu'un certain nombre de ces évènements soient favorables à l'épreuve que vous voulez faire, le reste, défavorables : par exemple que, dans une urne, il y ait 6 boules blanches et 19 noires. alors on dit que la probabilité pour que l'évènemt. favorable se présente, ici la probabilité de tirer une boule blanche par ex. est exprimée par le rapport entre le nombre des évènements favorables et le nombre total des évènements possibles, ici, par le rapport $\frac{6}{25}$. — Et l'on étend cette définition, adoptée d'abord pour ce cas simple d'une urne contenant des boules blanches et noires, à tous les cas où l'on peut ainsi partager les évènements possibles en un certain nombre de favorables, et de défavorables, pourvu qu'ils soient tous également possibles. — ainsi ce que nous venons de dire ne sera plus vrai s'il y a un certain nombre de boules plus grosses que les autres.

Si nous avons un dé cubique à six faces, non pipé, la chance d'amener une qcq. des six faces est la même. La probabilité d'amener chacune d'elles est par définition $\frac{1}{6}$.

La probabilité que la première carte tirée d'un jeu de cartes ordinaire sera une figure est $\frac{12}{32}$.

avant d'aller plus loin, il faut justifier cette définition, c.àd. voir bien qu'elle n'implique pas contradiction avec les idées que nous avons sur la probabilité des évènements.

Je dis d'abord que si deux évènements ont des pro-babilités numériques égales comme nous venons de les définir, c'nous les regarderons effectivement com-me égalemt. possibles, et nous échangerions volontiers les uns contre les autres les avantages que nous pouvons retirer de chacun d'eux. — Supposons que dans une urne il y ait 6 boules bl. et 18 n. La probabilité d'en tirer une bl. sera $\frac{6}{24}$ cad. $\frac{1}{4}$. Supposons que dans une autre urne il y en ait 5 bl. et 15 n. La probabilité d'en tirer une bl. sera $\frac{5}{20}$ ou $\frac{1}{4}$. D'après notre définition, les deux probabilités sont donc les mêmes : elle sera en dé-faut si nous nous ne pouvons pas regarder la chance de tirer une bl. comme étant la même dans les deux cas. or nous le pouvons : et il suf-fit de faire voir que toujours il y a même chance de tirer d une blanche dans une urne qui contient 1 b. bl. et 3 noires, et dans une autre qui en contient m bl. et 3m N. — or nous admettrons comme évident que, dans le premier cas, la chance reste la même quelle que puisse être la forme des quatre boules, même si elles prennent cette forme ∞ ou celle-ci ∞∞∞ ou même davantage, pourvu que les quatre sys-tèmes soient toujours parfaitement identiques : de même encore si chacun d'eux se partage, et si l'on a un groupe de m blanches et 3 grou-pes de chacun m noires : en imaginant si l'on veut que les m boules d'un groupes soient reliées

par des fils, qu'on n'aura pas besoin ensuite de conserver pour que le résultat reste cependant le même. ainsi des probabilités numériques égales répondent bien à des chances que l'esprit regarde comme absolument identiques.

Je dis en second lieu que, deux événements étant considérés, celui auquel notre définition assignera la plus grande probabilité numérique sera aussi celui que nous jugerions devoir arriver plutôt que l'autre.

Supposons deux urnes contenant

l'une m boules bl. et n noires

l'autre m' — — n' —

et supposons la probabilité de tirer une blanche plus grande dans le premier cas que dans le second

$$\frac{m}{m+n} > \frac{m'}{m'+n'} \qquad (1)$$

Sans changer rien aux chances, considérons les deux nouvelles urnes qui contiendraient

l'une $m(m'+n')$ Bl. et $n(m'+n')$ N.

l'autre $m'(m+n)$ — — $n'(m+n)$ —

Cette fois, le nombre total des boules est le même dans ces deux urnes. Donc la probabilité morale sera la ~~mon~~ plus grande pour celle qui contiendra le plus de blanches : or c'est la première, puisque l'Eq. (1) donne $m(m'+n') > m'(m+n)$: c'est celle aussi pour laquelle la probabilité mathématique est la plus grande.

Cela suffit pour faire accepter notre définition. — Seulement, il ne faut pas croire que le rapport par lequel nous représentons la probabilité d'un événement, en soit une expression mathématique : il la représente de la même façon que le sinus représente l'arc : il croît et décroît en même temps qu'elle, mais non sans doute proportionnellement.

La probabilité 0 représente un événemt. impossible, et la probabilité 1 signifie la certitude. — Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1.

Cependant l'événemt. dont la probabilité est 0 peut n'être pas rigoureusemt. impossible. — Supposons qu'on jette une pièce de monnaie en l'air, de manière qu'elle tombe sur une certaine surface. On demande la probabilité pour que le centre de gravité mathématique de la pièce tombe en un point déterminé de la surface. Il est clair que, comme la surface comprend une infinité de points, cette probabilité est 0 : et cependant l'événement n'est pas absolument impossible. — Si l'on demandait la probab. pour que ce même événemt. n'arrivât pas, on trouverait 1, bien qu'il n'y ait pas encore certitude absolue.

Dans le calcul des probabilités, on ne se borne pas à considérer les événements qui ne peuvent arriver que d'un certain nombre de manières déterminées. On cherche par exemple quelle est la durée probable de la vie d'un homme, quelle est la probabilité pour qu'un magistrat rende un arrêt équitable, etc.

Quelle que soit la manière par laquelle on puisse arriver à des Résultats de cette sorte, comprenons seulement ce qu'ils veulent dire : Quand on dit que la probabilité pour qu'un jugement soit équitable, est $\frac{5}{8}$, on veut dire uniquement : l'accusé a autant de chances d'être bien jugé, qu'il aurait de chances de tirer une boule blanche dans une urne qui en contiendrait 5 blanches et 3 noires.

Avant d'aller plus loin, montrons immédiatemt. avec quel soin il faut procéder dans le calcul des probabilités : il y a peu de problèmes où l'on soit aussi exposé à se tromper que dans ceux qui concernent cette partie des Mathématiques. Cela tient à ce que, dans l'énumération de tous les cas qui peuvent se présenter, on ne fait pas toujours assez attention si tous ces cas sont également possibles. – En voici un exemple célèbre où s'était trompé d'Alembert. On jette une pièce de monnaie en l'air. On demande quelle est la probabilité pour que, sur deux épreuves, pile arrive au moins une fois. – Voici ce que disait d'Alembert. Au 1er coup, j'amène pile, ou face. Si pile, j'ai gagné, et tout est dit. Si face, je recommence, et deux cas peuvent se présenter : desquels un favorable, l'autre non. Donc en tout trois cas

1°. Pile puis Rien

2°. Face puis Face

3°. Face puis Pile

deux de ces cas me sont favorables : donc la probabilité est $\frac{2}{3}$. — or ce raisonnement n'est pas bon, parce que les 3 évènements ne sont pas également possibles probables : le premier évènement a, à lui seul, une probabilité égale à celle des deux autres : réellement, quatre cas également probables peuvent se présenter, sur lesquels 3 favorables : donc la probabilité est $\frac{3}{4}$.

Exposons maintenant quelques règles fondamentales qui abrègeront beaucoup les calculs de probabilités.

Règle des Probabilités composées. — Quand un évènement se compose de plusieurs autres tout-à-fait indépendants, sa probabilité est le produit des probabilités des autres.

Prenons le cas de deux évènements. Supposons deux urnes contenant

l'une m B. Bl. et n N.

l'autre m' — n' —

On tire une boule de chacune : quelle est la probabilité pour que les deux boules soient blanches ?

La probab. pour que la 1re soit blanche est $\frac{m}{m+n}$

——— 2e ——— $\frac{m'}{m'+n'}$

Je dis que la probabilité pour qu'elles le soient toutes deux est $\frac{m\,m'}{(m+n)(m'+n')}$. En effet, le nombre des chances favorables est mm', chacune des blanches de la première urne pouvant sortir avec une qcq. des Bl.

de la Seconde. D'ailleurs le nombre total des cas possibles est $(m+n)(m'+n')$. Donc ... cqfd.

Il est clair que ce raisonnement peut se généraliser et s'applique aussi bien à plusieurs événements qu'à deux.

Il peut se faire encore que les événements qu'on considère ensemble ne soient plus indépendants les uns des autres. — Supposons une urne contenant 5 B. Bl. et 3 N. La probabilité qu'on en tirera une Bl. est $\frac{5}{8}$. On demande la probabilité qu'on en amène deux blanches de suite, en les prenant successivement, et ne remettant pas la première. — Quand la première est sortie, il reste, si elle était blanche, 4 Bl. 3 N. et la prob. d'en tirer une Bl. est $\frac{4}{7}$. Elle est au contraire $\frac{5}{7}$ si la 1ère était noire. La seconde probabilité semble donc douteuse. Voici ce qu'on peut dire. Nous cherchons la prob. de tirer deux boules Bl. de suite. Si la 1ère est noire, l'événement n'arrivera certainement pas : alors nous pourrons, dans ce cas, modifier d'une manière qcq. la seconde épreuve. Donc, nous supposerons toujours que cette seconde épreuve se fasse avec 4 Bl. et 3 N. comme si la 1ère eût été nécessairement favorable. — La probabilité demandée est donc en définitive $\frac{5.4}{8.7}$.

En généralisant, on arrive à cette règle :

Pour avoir la probabilité d'un événement composé de deux autres lorsque la probabilité du premier influe sur celle du second, il faut multiplier la prob. du premier par celle du second en supposant celui-là favorable.

Comme Exemple, proposons-nous ce problème. Une Urne contient 1 B. Be et 999 N. — Quelle est la probabilité d'amener la Blanche au moins une fois sur n Epreuves ? (en Remettant chaque fois la Boule Tirée). — La probabilité d'amener la Blanche au 1er coup est $\frac{1}{1000}$. Désignons-la pour plus de Généralité par P. Celle de ne pas l'amener est donc $1-P$ (car évidemt. la Prob. d'un Event. + la Prob. de l'Evt. contraire $=1$ ou certitude). Pour 2 Epreuves, la Prob. de ne pas amener la Blanche est $(1-P)^2$. Pour n Epreuves, c'est $(1-P)^n$: donc la Prob. demandée est $1-(1-P)^n$.

Comme cas particulier, faisons $P=\frac{1}{n}$, c.à.d. supposons qu'on fasse autant d'Epreuves qu'il y a de Boules. alors la probabilité demandée devient $1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. or, si n est très-grand, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$ sensiblemt. Donc la prob. cherchée est à-peu-près $1-\frac{1}{e}$ ou $\frac{2}{3}$. — Si donc on a 1 million de Boules dont une seule Blanche, il n'y aura pas en général besoin d'1 million d'Epreuves pour voir sortir celle-ci.

Règle des Probabilités Totales. —

Quand on cherche la probabilité d'un évènemt. et que celui-ci peut arriver de plusieurs manières distinctes, indépendantes les unes des autres : sa probabilité est la somme des probabilités des évènements particuliers et distincts qui réalisent l'évènement considéré.

ainsi, pour en donner immédiatemt. un Exemple, la probabilité de tirer un valet de dans un jeu

de cartes est égale à la somme des probabilités qu'il y a d'amener le valet de pique, le valet de trèfle, le valet de carreau et le valet de cœur.

Il suffit d'énoncer cette règle, fort souvent utile, pour qu'elle soit démontrée. Car, soit F le nombre total des cas favorables, P celui des cas possibles, si l'on a $F = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ il est clair qu'on aura $\frac{F}{P} = \frac{f_1}{P} + \frac{f_2}{P} + \dots + \frac{f_n}{P}$.

Exemple. — Une urne contient 7 B. Bl. et 3 N. Je prends 1 boule et je la remets, je recommence, puis une fois encore. Quelle est la probabilité d'amener au moins une blanche sur les trois épreuves?

L'événement demandé peut se réaliser de trois manières, si l'on tire

1°. trois blanches

2°. deux blanches et une noire

3°. deux noires et une blanche

Faisons la somme des probabilités des trois cas.

La probabilité du premier est évidemment $\left(\frac{7}{10}\right)^3$ d'après la règle des prob. composées.

Le second peut arriver de trois manières, suivant qu'on tirera

1 Bl, 1 Bl et 1 N.

ou 1 Bl, 1 N. et 1 Bl.

ou 1 N., 1 Bl. et 1 Bl.

La probabilité de chacune de ces manières est $\left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot \frac{3}{10}$ donc la probabilité du 2°. cas est $3 \cdot \frac{3}{10} \left(\frac{7}{10}\right)^2$.

on verrait de même que la probabilité du troisième est
$3 \cdot \frac{7}{10} \left(\frac{3}{10}\right)^2$.

Donc enfin la probabilité totale demandée est

$$\left(\frac{7}{10}\right)^3 + 3 \cdot \frac{3}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^2 + 3 \cdot \frac{7}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{973}{1000}.$$

Généralisons ce problème.

Soit P la probabilité d'un événement
— Q ——— du contraire

$$(P + Q = 1)$$

on fait m épreuves, toutes dans les mêmes conditions. On demande la probabilité pour que, sur ces m épreuves, il y en ait m' favorables au premier et par suite n' au second $(m' + n' = m)$.

Appliquons le principe des probabilités totales. Il peut se faire de bien des manières qu'il y ait m' épreuves favorables au premier événement et n' ——— second ———.

Écrivons m' fois la lettre P, n' fois la lettre Q, pour représenter ces épreuves.

$$\underbrace{P, P, P, \ldots P}_{m'} \cdot \underbrace{Q, Q, Q, \ldots, Q}_{n'}$$

Il y a une foule de manières de grouper ces $(m'+n')$ lettres, de façon que beaucoup d'événements distincts en réalité, nous donneront toujours le même résultat final demandé. — Combien y a-t-il de ces manières ? il semble que ce soit le nombre de permutations $1.2.3\ldots(m'+n')$. Mais remarquons qu'on serait alors amené à considérer comme distincts des événements semblables : car si deux permutations ne

différent que par le changement de deux lettres P par exemple, ils seront identiques. Donc chaque permutation sera reproduite un nombre de fois égal à $(1.2.3..m')(1.2.3...n')$. Donc le nombre de permutations distinctes, celui des évènements réellemt. différents qui donnent lieu à l'évènement final demandé est $\frac{1.2.3......(m'+n')}{(1.2.3...m')(1.2.3...n')}$. — La probabilité de chacun de ces évènements partiels sera évidemment la même et égale à $P^{m'}.Q^{n'}$. Donc la probabilité totale demandée sera

$$\frac{1.2.3....(m'+n')}{(1.2.3...m')(1.2.3...n')}P^{m'}.Q^{n'}$$

on voit que c'est le terme général du développemt. de $(P+Q)^m$. — Si donc on trouve développé ce binome, chaque terme représentera la solution du problème général que nous venons de nous proposer, pour toutes les valeurs possibles de m' et de n'. — Et la somme totale sera bien égale à 1 ; puisque la somme des probabilités de tous les évènements possibles doit donner la certitude. Cela devait être, puisque $P+Q=1$.

Appliquons immédiatement les principes précédents à quelques problèmes simples.

Deux joueurs A et B jouent ensemble, à un jeu loyal, et sont de même force, de façon qu'il y a pour chacun probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner chaque partie. A possède m francs, et B n fr. Ils jouent 1 fr. la

la partie : et ils jouent indéfiniment. Quelle est la probabilité que A ruinera B, et celle que B ruinera A?

Remarquons qu'à chaque instant les joueurs, à eux deux, possèdent toujours $(m+n)$ fr. — Supposons qu'après un certain nombre indéterminé de coups, A possède x francs, et soit y_x la probabilité qu'il y a alors pour qu'il ruine son adversaire. — A peut ruiner B de deux manières distinctes, et seulemt. de deux manières : en gagnant la prochaine partie, ou en la perdant. Nous pouvons donc dire : la probabil. totale que A ruinera B = la prob. que A ruinera B en supposant que A gagne la prochaine partie + la me prob. en supposant qu'il la perde.

Or, si A gagne la première partie, il aura $(x+1)$ fr. et la probab. qu'alors il ruinera B est y_{x+1}. Donc la probab. que A gagnera la proch. partie et ruinera ensuite son adversaire est $\frac{1}{2}\, y_{x+1}$ (Probab. composée).

De même, la prob. que A ruinera B en perdant la première partie est $\frac{1}{2}\, y_{x-1}$.

Donc

$$y_x = \frac{1}{2}\, y_{x+1} + \frac{1}{2}\, y_{x-1} \qquad (1)$$

Cette équation prouve que les probabilités successives

$y_0 \;\; y_1 \;\; y_2 \;\; \cdots \;\; y_{x-1} \;\; y_x \;\; y_{x+1} \;\; \cdots \;\; y_{m+n}$ forment

une progression arithmétique : car l'Eq. (1) donne

$$y_{x+1} + y_{x-1} = 2\, y_x$$

d'où

$$y_{x+1} - y_x = y_x - y_{x+1}$$

donc la différence entre deux termes consécutifs est constante. donc ... de plus, nous connaissons évidemt.

le premier terme $y_0 = 0$ et le dernier $y_{m+n} = 1$, et le nombre $m+n+1$ des termes de la progression, laquelle se trouve ainsi complètement déterminée. — Donc, si r est la raison, on aura

$$y_{m+n} = y_0 + r\left[(m+n+1) - 1\right]$$

ou

$$1 = r(m+n)$$

$$r = \frac{1}{m+n}$$

Et par suite

$$y_m = \frac{m}{m+n} \qquad y_n = \frac{n}{m+n}$$

ce sont les probabilités demandées.

On vérifie que $y_m + y_n = 1$. Donc, pourvu que les deux joueurs jouent assez longtemps, il est certain que l'un des deux finira par se ruiner. Il est très-probable que c'est le plus riche qui finira par tout gagner : car le rapport des probabilités de gagner est pour les joueurs le même que le rapport de leurs fortunes. Ce résultat, qu'on eût presque pu prévoir à priori, prouve qu'un individu qui joue toujours, sans interruption, finira toujours par se ruiner, quelque riche qu'il soit : car il peut être regardé comme jouant contre le public, dont la fortune est infinie par rapport à la sienne.

Nous venons de trouver $y_m = \frac{m}{m+n}$, $y_n = \frac{n}{m+n}$: si A gagne, il gagnera n francs ; B peut gagner m fr. On voit que si l'on multiplie la probabilité de gagner pour chaque joueur par le gain

qui peut lui Revenir, on a le même produit pour les Deux Joueurs. C'est là un fait Général dans tous les Jeux. Ce produit, le même pour tous les Joueurs, est ce qu'on appelle l'Espérance Mathématique.

Généralisons ce problème, et supposons que les Deux Joueurs ne soient pas de même force.

A possédant toujours m francs

B ————— n —

Supposons de plus que, par l'inégalité de force,

A ait une probabilité p de gagner chaque partie

B ————— q —————

$$(p + q) = 1$$

Quelle est la probabilité que A ruinera B, et celle que B ruinera A, au Bout d'un nombre Indéterminé de parties ?

Soit toujours y_x la probabilité que A Ruine B au moment où lui, A, possède x fr. — En Raisonnant comme tout-à-l'heure, nous aurons Evidem.t l'Equation

$$y_x = p\, y_{x+1} + q\, y_{x-1} \qquad (1)$$

C'est là ce qu'on appelle une Equation aux Différences finies. — Il est évident que la Solution de cette Equation, ou, si l'on peut parler ainsi, son Intégrale Générale, en un mot, la valeur de y_x en fonction de x, doit contenir Deux Constantes arbitraires : car, si nous connaissions y_0 et y_1 par exemple, l'Eq. (1) nous permettrait de calculer de proche en proche y_2 y_3 y_4 -- etc. Cherchons donc une

valeur de y_x qui contienne deux constantes. — or, posons

$$y_x = c\,a^x$$

l'Eq. (1) donnera

$$a^x = p\,a^{x+1} + q\,a^{x-1}$$

ou

$$a = p\,a^2 + q$$

d'où deux valeurs de a

$$a = \alpha \quad \text{et} \quad a = \alpha_1$$

et il est clair que l'intégrale générale de l'Eq. (1) sera

$$y_x = C\,\alpha^x + C_1\,\alpha_1^x$$

C et C_1 sont deux constantes arbitraires qu'on déterminera par la condition que $y_0 = 0$ et $y_{m+n} = 1$. et l'on en déduira ensuite aisément les valeurs demandées de y_m et de y_n.

Trois joueurs jouent d'égale force. Chaque partie se joue entre deux individus seulement, et le 3e. remplace le perdant. Soient A, B, C les 3 joueurs. Ils continuent à jouer jusqu'à ce que l'un des trois ait gagné tour deux fois de suite : alors la partie est finie. Le premier coup s'est joué entre A et B, et c'est B qui a gagné. Je demande quelles sont à ce moment les probabilités de gagner pour chacun des trois joueurs.

Remarquons que, tant que la partie ne finira pas, l'ordre des joueurs est parfaitement déterminé après la première partie : et il sera le suivant

A, B | B, C | C, A | A, B | B, C | C, A | A, B | ...

et ainsi de suite indéfinim^t. dans le même ordre ; de sorte qu'on peut dire que

Toute partie de rang $3n-2$ se jouera entre A et B

———— $3n-1$ ———— B et C

———— $3n$ ———— C et A

Au reste, dans chaque partie, la probabil. de gagner est $\frac{1}{2}$ pour chacun des 2 joueurs en présence.

Soient, après la 1re. partie jouée comme on l'a dit,

x la probabilité de gagner pour A

y ———— B

z ———— C

Cherchons d'abord la probabilité y, qui est évidem^t. la plus grande. — B peut gagner de deux manières distinctes, et seulement de deux manières : soit en gagnant la prochaine partie, soit en la perdant et gagnant ultérieurement. C'est donc le cas d'appliquer le principe des probab. totales. et j'aurai

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

car il est clair que si B perd il se trouvera précisément dans le même cas où A se trouve actuellement : et la probabil. pour que cela arrive est $\frac{1}{2}$, celle pour que B gagne ensuite est x : celle pour que les deux évènements arrivent est $\frac{1}{2}x$.

Cherchons maintenant la Probabilité z. — C ne peut gagner que d'une seule manière : en gagnant la prochaine partie : car, s'il la perdait, B gagnerait et tout serait dit. — Puis, quand C aura gagné cette prochaine partie, la probabilité pour qu'il gagne tout se trouvera y, puisqu'il sera alors dans le même cas où B est maintenant. Donc

$$z = \frac{1}{2} y$$

Enfin cherchons x. — Pour que A gagne, il faut nécessairement que C gagne la prochaine partie. C ayant gagné, A rentrera et se trouvera dans le même cas où est actuellement C. Donc

$$x = \frac{1}{2} z$$

Nous avons donc entre les trois inconnues x y z les 3 équations

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x \\ z = \frac{1}{2} y \\ x = \frac{1}{2} z \end{cases}$$

Si on les ajoute membre à membre, on a

$$x + y + z = 1$$

Donc il est sûr que l'un des trois joueurs finira par gagner, bien qu'ici encore le contraire ne soit pas mathématiquement impossible. — Si l'on résout ces équations, on trouve

$$\begin{cases} y = \frac{4}{7} \\ z = \frac{2}{7}. \\ x = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Si les joueurs sont de force différente, le problème deviendrait plus compliqué; parce qu'on ne verrait plus les ~~fo~~ chances des joueurs s'échanger comme tout-à-l'heure les unes dans les autres.

Supposons une urne contenant trois sortes de boules, les unes marquées 1, les autres mar-

-quées 2, et les dernières marquées 3. Elles sont en nombre différent, de façon que

la probabil. de tirer une boule N°. 1 est p

——————————————— 2 — q

——————————————— 3 — r

$$(p+q+r=1)$$

Un banquier tient le jeu. On lui donne ~~un~~ 1 fr. et il promet de vous le rendre si la boule sortante est marquée 1, de vous rendre 2 fr. si la boule sortante est marquée 2 : mais il ne vous rendra rien si elle est marquée 3.

Un individu se présente avec 1 fr. et le joue, avec l'intention de jouer indéfiniment tout l'argent qui peut lui rentrer : ainsi, s'il amène ~~la~~ une boule 2, il lui rentrera 2 fr : il jouera ces deux francs en une seule épreuve, mais chaque franc aux mêmes conditions, sans que le sort de l'un ait aucune d'influence sur le sort de l'autre franc. S'il a la chance de gagner 4 fr. avec cela, il les jouera tous les quatre en 4 coups parallèles, formant la 3e. épreuve ; et ainsi de suite. — Je demande la probabilité pour que cet homme finisse tôt ou tard par se ruiner complètement.

Soit ~~x~~ ~~la~~ y_x la probabilité qu'il soit ruiné a-près x épreuves : c'est y_∞ qu'il faut trouver. Cherchons pour cela y_x. — Notre homme peut être ruiné après x épreuves de trois manières, distinctes, et les seules possibles : savoir : en amenant une boule 1 à la 1ère. épreuve, ou en amenant une boule 2, ou

en amenant une boule 3. — Cherchons la probab. pour que, dans chacun de ces 3 cas, le joueur soit ruiné après x épreuves, et nous appliquerons ensuite le principe des probabilités composées.

S'il amène une boule 1, ce dont la probab. est p, la probabil. qu'il se ruinera ensuite dans les $x-1$ coups restants est y_{x-1}. La probab. que les deux événem^ts. arrivent est $p\,y_{x-1}$.

S'il amène la boule 2, ce dont la probabilité est q, il aura 2 fr. Pour chacun de ces 2 fr. la probabilité d'avoir disparu avec tout ce qu'il aura pu rapporter, au bout de $x-1$ épreuves, est y_{x-1} : la probab. pour qu'il en soit ainsi de tous les deux est $(y_{x-1})^2$. La prob. pour que les trois évén.^ts arrivent est $q\,(y_{x-1})^2$.

Enfin s'il amène une boule 3, ce dont la prob. est r, tout est dit, et la ruine est immédiate.

Donc

$$y_x = p\,y_{x-1} + q\,(y_{x-1})^2 + r$$

On voit que cette équation permettrait de former le tableau des probabilités successives $y_0\ y_1\ y_2$ --- etc. vu qu'évidemm^t. on a $y_0 = r$. On pourrait donc avoir y_n, quel que fût n. — Mais c'est y_∞ que l'on demande. — Admettons que, quand x est infini, on ait sensiblement $y_x = y_{x-1} = t$: t sera la probab. que le joueur sera ruiné tôt ou tard. Nous aurons

$$t = pt + qt^2 + r$$

ou bien

$$q t^2 + (p-1) t + r = 0$$

Les deux racines de cette équation sont

$$t = 1 \quad \text{et} \quad t = \frac{r}{q}$$

Nous voici donc assez embarrassés, avec nos deux racines réelles et positives : la probabilité d'un même événemt. ne peut être en même temps 1 et $\frac{r}{q}$. — Si pourtant r est plus grand que q, la racine $t = \frac{r}{q}$ n'a plus de sens, et il est certain que l'individu se ruinera. — Mais si r est $< q$, comment faire ? Je dis qu'il faut prendre $t = \frac{r}{q}$. — En effet, supposons $r = 0$: alors il est clair qu'il est impossible que le joueur soit ruiné, et de même si r est très-petit par rapport à q. Donc alors c'est la racine $t = \frac{r}{q}$ qui convient : et, si r varie d'une manière continue, il est clair qu'il en devra être de même pour t. Donc enfin

$$t = \frac{r}{q}$$

Donc, tant qu'il y aura moins de chances de tirer une boule 3 qu'une boule 2, le joueur n'est pas certain de se ruiner. — Si les chances sont égales, auquel cas le jeu est équitable, il est sûr qu'il se ruinera : c'est que, comme dans un problème précédent, il joue contre beaucoup plus riche que lui.

On a m boules numérotées, $1, 2, \ldots m$ et m cases égalemt. numérotées. on prend chaque numéro et on le met dans une case, au hasard. On demande de calculer quelles sont les probabilités respectives

pour qu'aucun numéro ne tombe dans sa case,
pour qu'un seul y tombe,
pour que deux y tombent,
. . . . .
enfin, pour qu'ils y tombent tous.

C'est là, sous une autre forme, le problème de la Bataille aux cartes, en supposant que le l'as de cœur et l'as de carreau par exemple ne font pas bataille : mais que chaque joueur a un jeu complet, et qu'il faut deux cartes absolument identiques pour faire bataille.

Ce problème, assez intéressant par lui-même, est surtout curieux par la simplicité des résultats qu'il fournit.

Le nombre des événements possibles est égal au nombre de permutations de m objets : c'est $(1.2.3.4\ldots m.)$
Parmi toutes ces permutations, soient :

P_0^m le nombre de celles où aucun numéro n'est dans sa case ;
P_1^m ——————— un seul —— est dans la sienne ;
P_2^m ——————— deux —— y sont ;
- - - - - - - - - - - - - - - - -
P_{m-1}^m ——————— $(m-1)$ ——————
P_m^m ——————— ils sont tous dans leurs cases.

Ces deux derniers symboles, P_m^m et P_{m-1}^m ne sont là que pour la régularité. Car il est bien clair que $P_m^m = 1$ et que $P_{m-1}^m = 0$: il est impossible qu'il n'y ait qu'un numéro hors de sa case.
Il est évident que j'aurai

$$1.2.3\ldots m = P_0^m + P_1^m + P_2^m + \cdots + P_m^m$$

Si je divise par $1.2\ldots m$, j'aurai dans le second membre

la somme de toutes les probabilités demandées : leur somme sera 1, comme on devait s'y attendre :

$$1 = \frac{P_0^m}{1.2\ldots m} + \frac{P_1^m}{1.2\ldots m} + \frac{P_2^m}{1.2\ldots m} + \cdots + \frac{P_m^m}{1.2\ldots m}$$

Maintenant, je dis qu'on a la relation $P_1^m = m P_0^{m-1}$. En effet, P_1^m est le nombre des événements où une boule est dans sa case. Prenons donc une boule, et mettons-la à sa place. Il en restera $m-1$ qui ne devront être aucune à sa place : ce qui peut se faire de P_0^{m-1} manières. Comme on peut recommencer avec chacune des m boules données, il s'ensuit qu'on a bien

$$P_1^m = m P_0^{m-1}$$

De même évidemt.

$$P_2^m = \frac{m(m-1)}{1.2} P_0^{m-2}$$

$$P_3^m = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} P_0^{m-3} \quad \text{etc.}$$

Substituons ces valeurs dans le second membre de l'équation précédente, et posons pour abréger

$$\frac{P_0^n}{1.2..n} = \Pi_n$$

nous aurons

$$1 = \Pi_m + \Pi_{m-1} + \frac{\Pi_{m-2}}{1.2} + \frac{\Pi_{m-3}}{1.2.3} + \frac{\Pi_{m-4}}{1.2.3.4} + \cdots$$

Reste à calculer P_0^m, P_0^{m-1}, P_0^{m-2}, ... Nous allons pour cela chercher à déduire ces quantités les unes des autres.

Prenons les m boules, et appelons-les

$$a, b, c, \ldots k, l$$

~~et supposons les toutes dans leurs cases.~~ Je prends les $m-1$ premières, et je les mets dans $m-1$ cases de façon qu'aucune ne soit dans la sienne : cela peut se

(x)

faire de P_0^{m-1} manières. Je prends ensuite la dernière et je cherche à l'introduire de façon qu'aucune des m boules ne soit en définitive bien placée : (car je cherche à exprimer la valeur de P_0^m). — Je puis y parvenir de deux sortes de manières : ou en mettant l dans la case vide, ou en mettant dans cette case vide une des autres boules, et ensuite l dans la case libre : En tout, m manières d'introduire la boule l. Mais, sur ces m manières, il y en a nécessairement une à rejeter : celle où l'on mettrait l dans la case vide, si celle-ci est justement la case l ; ou bien, si ce n'est point la case l, mais la case f par exemple, on exclura le cas où l'on prendrait la boule f pour la mettre dans la case vide et la remplacer par la boule l. — Donc, en commençant comme je l'ai dit, il y a m-1 manières d'introduire la boule restante l.

(x) pourvu que la case réservée soit la case l : — car, sans cela, on ne pourrait dire que cela peut se faire de P_0^{m-1} manières. — Le raisonnement qui suit est donc inexact : mais le résultat est bon. Il faut dire seulement que l'on ne peut introduire la boule l dans la case restante, qui est la sienne : donc il n'y a que m-1 manières d'introduire cette boule l.

Supposons maintenant qu'on ait commencé par placer les m-1 premières boules de façon qu'une seulement fût dans sa case : ce qu'on peut faire de P_1^{m-1} manières. Il est clair qu'on n'aura qu'une chose à faire : enlever la boule qui est en place, la mettre dans la case vide, et lui substituer la boule l.

Enfin si l'on plaçait les m-1 premières boules de façon que plus d'une se trouvât à sa place, il n'y aurait ensuite aucun moyen d'introduire l de façon qu'ensuite aucune boule ne fût dans sa case.

ou, s'il y a moyen, cela rentrerait alors dans une des combinaisons déjà considérées.

Donc on aura

$$P_0^m = (m-1)\,P_0^{m-1} + P_1^{m-1}$$

Mais on a vu que $P_1^{m-1} = (m-1)\,P_0^{m-2}$. Donc en

définitive on aura

$$P_0^m = (m-1).\left(P_0^{m-1} + P_0^{m-2} \right)$$

ou bien encore

$$\Pi_m = \frac{m-1}{m}\Pi_{m-1} + \frac{1}{m}\Pi_{m-2}$$

ainsi, connaissant Π_1 et Π_2, on pourra calculer Π_3, par suite Π_4, etc.

à l'inspection de cette formule, il est facile de voir que, si m augmente, Π_m converge rapidement vers une limite fixe: de façon que si m atteint la valeur 15 ou 20, on a sensiblement $\Pi_m = \Pi_{m-1} = \Pi_{m-2} = \ldots$ avec 40 ou 50 décimales d'approximation. — En effet, on a d'abord une première idée de cette rapide convergence en remarquant que l'Eq. est satisfaite si l'on y pose $\Pi_m = \Pi_{m-1} = \Pi_{m-2}$. — Mais, plus rigoureusement: soit

$$\Pi_{m-1} = \Pi_{m-2} + \varepsilon$$

nous aurons

$$\Pi_m = \frac{m-1}{m}\Pi_{m-1} + \frac{1}{m}\Pi_{m-1} - \frac{\varepsilon}{m}$$

$$= \Pi_{m-1} - \frac{\varepsilon}{m}$$

Donc la différence entre Π_m et Π_{m-1} est $\frac{\varepsilon}{m}$, m fois plus petite que la différence entre Π_{m-1} et Π_{m-2}. on voit avec quelle rapidité excessive décroissent ces différences.

Du moment que les différents termes de la série sont égaux, leur valeur commune est évidente: et l'on a très-sensiblement

$$1 = \Pi_m \left(2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots \right)$$

d'où

$$\Pi_m = \frac{1}{e}$$

ainsi, pour peu que les nombres des boules employées soit un peu considérable, on voit que

la probabilité pour qu'aucune boule ne soit à sa place est $\frac{1}{e}$

celle pour que 1 boule y soit est encore $\frac{1}{e}$

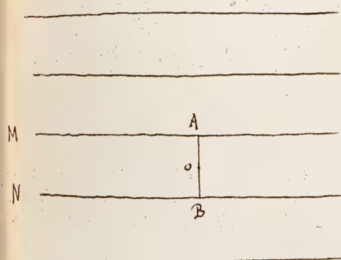
——— 2 ——— ——— est $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}$

——— 3 ——— ——— — $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{e}$

——— 4 ——— $\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{e}$

etc. , formules d'une approximation presque ri-gourense.

On trace sur une feuille de papier des raies parallèles équidistantes : — Soit $2a$ la distance de deux de ces raies consécutives : — et on lance sur le papier une petite aiguille homogène de longueur $2l$. — Quelle est la probabilité pour que cette aiguille rencontre une des raies ?



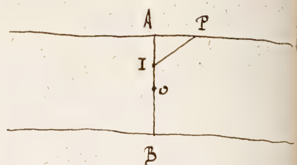
Nous supposerons expressément $l < a$. autrement les formules ne seraient plus les mêmes.

Le centre de l'aiguille peut tomber en bien des endroits. Mais il est évident, vu la symétrie, qu'on peut le regarder comme assujetti à tomber toujours entre deux raies déterminées M et N, sans que cela altère aucunement la probabilité demandée.

On pourra de même, encore à cause de la symétrie, supposer que le centre tombe toujours sur une certaine droite AB perp. à toutes les parallèles, et sur une même moitié oA de cette perpendiculaire.

Je considère la probabilité demandée comme une probabilité totale. Car il peut se faire qu'il y ait ren-contre, le centre tombant en chacun des points de oA. — Je décompose donc cette droite oA en élé-

-ments infiniment petits dx : — Je suppose que le centre I de l'aiguille tombe sur un de ces éléments dx, et je cherche la probabilité pour qu'il y ait rencontre. On a $IA = x$. — Soit $IP = l$. — Si φ désigne l'angle AIP, on aura $\cos\varphi = \frac{x}{l}$



$$\varphi = \text{arc}\cos\frac{x}{l}$$

Et il y aura évidemment rencontre si l'aiguille fait avec AB un angle $< \varphi$; sinon, non. Donc la probabilité qu'il y aura rencontre est

$$\frac{\text{arc}\cos\frac{x}{l}}{\frac{\pi}{2}}$$

Remarquons bien que cette probabilité ne pourra s'appliquer que si $x \leq l$.

Maintenant, la probabilité composée pour que le centre tombe sur dx, et pour qu'il y ait rencontre, est

$$\frac{dx}{a} \cdot \frac{\text{arc}\cos\frac{x}{l}}{\frac{\pi}{2}}$$

c'est là la probabilité élémentaire de la probabilité totale que nous cherchons. Celle-ci sera donc

$$P = \frac{2}{\pi a}\int_0^l \text{arc}\cos\frac{x}{l}\,dx$$

En posant $\text{arc}\cos\frac{x}{l} = \varphi$, intégrant par parties, et réduisant, on trouve

$$P = \frac{2l}{\pi a}$$

On vérifie immédiatement sur cette formule qu'elle ne peut s'appliquer au cas de ~~P~~ $l > a$. Car alors on aurait $P > 1$.

Cette formule est curieuse et importante, en ce sens qu'elle permet de vérifier facilement une loi du calcul des Probabilités. _ Cette loi, évidente du reste à priori, et connue sous le nom de Théorème de Bernouilli, peut s'énoncer ainsi :

Si l'on fait au hasard un très-grand nombre d'é-preuves, les événements auxquels donnent lieu ces épreuves arriveront très-probablement proportionnellement à leurs probabilités respectives.

Ainsi, si l'un des événements a une probabilité P, l'autre une probabilité Q, si le 1er arrive m fois, et le second n fois, on aura avec une certitude d'autant plus grande que le nombre des épreuves augmentera davantage,
$$\frac{m}{n} = \frac{P}{Q}.$$

Donc, il est très-probable que, dans le cas qui nous occupe, si R désigne le nombre de rencontres,
N ―――――――― d'expériences,
on aura, avec une approximation toujours crois-sante et indéfinie
$$\frac{R}{N} = \frac{2l}{\pi a}$$
$$\pi = \frac{2l}{a} \cdot \frac{N}{R}$$
et l'on arrive ainsi à calculer π d'une manière as-sez originale.

Reste le cas où $l > a$. _ Dans ce cas, il fau-drait intégrer entre les limites 0 et l. _ On ar-rive à un résultat compliqué : qui devra se réduire à 1 pour $l = \infty$ ou pour $a = 0$, se réduire à 0 pour $l = 0$.

Applications de la Théorie du Jeu.

La première application qu'on ait faite de la Théorie des Probabilités est relative à la science du Jeu : — ou plutôt, la Théorie mathématique du Jeu a précédé celle des Probabilités et lui a donné naissance. Huyghens le premier a donné un traité du Jeu en quelques pages, où il résout des problèmes compliqués sans y faire intervenir aucunement la notion encore inconnue de Probabilité.

Premier Principe. — Si deux Joueurs sont de force égale, et si le Jeu leur offre à tous deux des chances identiques, leurs mises devront être égales pour que le Jeu soit équitable.

Si au contraire les conditions du Jeu sont telles que l'un des Joueurs ait plus d'avantages que l'autre, il est clair que la mise de ce joueur soit aussi plus considérable. Cherchons quel doit être alors le rapport des deux mises.

Soient deux Joueurs ayant des probabilités p et q de gagner, et ayant des mises m et m'. Quelle est la relation entre p, q, m, m' si le Jeu est équitable ?

Soient P et Q deux nombres entiers proportionnels à p et q. Supposons un premier Jeu où il y ait $P+Q$ Joueurs : tous ayant des chances égales, et le gagnant prenant toutes les mises. Il est évident que la mise de tous les Joueurs doit être la même.

Soit K la mise de chacun: La mise totale, $K(P+Q)$, reviendra au Gagnant. — Maintenant, qui empêche un Individu d'acheter les chances des P premiers joueurs? Il suffira pour cela qu'il leur Rembourse leurs mises, en tout KP fr. et le Jeu sera encore Equitable. — De même si un second Individu achète KQ fr. les chances des Q autres Joueurs. Les probabilités de Gagner de ces deux Individus seront $\frac{P}{P+Q}$, $\frac{Q}{P+Q}$; leurs mises KP et KQ. on voit donc que, le Jeu étant Equitable, le Rapport des mises est le même que celui des probabilités de Gagner. — Donc $\frac{m}{n} = \frac{P}{Q}$ est la Relation cherchée. — Donc

Théorème. Lorsque deux Joueurs jouent avec des chances différentes, la partie ne sera Equitable que si les mises sont proportionnelles aux probabilités.

on démontrerait de même que ce Théorème s'applique au cas d'un nombre quelconque de Joueurs.

Ce principe s'énonce souvent d'une autre manière beaucoup plus commode dans la pratique, et où l'on ne considère que ce qui Regarde un seul des Joueurs. Si l'on appelle Espérance Mathématique d'un Individu le produit fait de sa probabilité de Gagner par la somme portion de l'enjeu qu'il peut gagner, on pourra dire :

Théorème. Un Jeu quelconque n'est Equitable que si l'Espérance mathématique de chaque Joueur est Egale à sa mise.

Soient en effet p, q, r, s les probabilités

de gagner pour différents Joueurs ; le Jeu étant équitable, leurs mises seront kp, kq, kr, ks. Si toute la somme doit revenir au gagnant, l'espérance mathématique du premier Joueur par exemple sera $p(kp+kq+kr+ks)$ ou $kp(p+q+r+s)$ ou kp. Elle est donc égale à sa mise. Donc .. c.q.f.d.

Cette Règle était loin d'être observée dans l'ancienne loterie de France. — Il y avait 90 numéros, et l'on en tirait cinq. Si l'on jouait sur l'extrait, la probabilité de gagner était $\frac{5}{90}$. Car nous pouvons supposer qu'on tire d'abord les 5 numéros, puis, que le Joueur, ne les connaissant pas, alors seulement fasse son choix : et il est clair que sa probabilité de gagner sera $\frac{5}{90}$ ou $\frac{1}{18}$. Donc, si l'on a mis 1 fr. la Loterie aurait dû donner 18 fr. au gagnant.

Si l'on jouait sur l'ambe : — Il y avait $\frac{5(5-1)}{2}$ ou 10 ambes sortis sur les 5 numéros. Le nombre total des ambes était de $\frac{90.89}{2}$ ou 4005. Donc la probabilité de gagner était $\frac{10}{4005}$ ou $\frac{2}{801}$ ou $\frac{1}{400,5}$: donc on eût dû donner $400^{fr},5$ au gagnant.

Il serait aisé de calculer de même les chances pour les ternes, quaternes ou quines. — Et l'on verra qu'on était loin de donner au gagnant tout ce qui aurait dû équitablement lui revenir.

Cette Règle de l'Espérance Mathématique a donné lieu à un paradoxe célèbre, plus célèbre même qu'il ne le mérite à notre sens. Il est connu sous le nom de Problème de Pétersbourg, parce que ce fut d'abord

à l'Académie de St. Pétersbourg qu'il fut proposé par Daniel Bernouilli. — voici le Problème. — Pierre et Paul conviennent de jouer de la manière suivante : Pierre jette une pièce en l'air, et doit donner 1 ducat à Paul s'il amène pile ; s'il amène face, il recommence, et s'il amène pile au 2^{d}. coup, il donnera 2 ducats ; s'il n'amène pile qu'au troisième coup, il donnera 8 ducats ; — qu'au 4e, il en donnera 16, et ainsi de suite. De façon que si pile n'arrivait qu'au 100e coup par exemple, Pierre devrait à Paul 2^{100} ducats, c.à.d. plus d'argent qu'il n'en circule dans le monde. — on demande de combien Paul doit payer d'avance pour que ce jeu soit équitable ? — Quelle est, en d'autres termes, l'Espérance mathématique de Paul ?

Il peut gagner 1 ducat au premier coup : la probabilité pour que cela arrive est $\frac{1}{2}$. Donc son Espérance mathém. pour ce premier coup est $\frac{1}{2}$.

Il peut gagner 2 ducats au 2^{d}. coup : la probabilité que cela arrivera est $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Donc son Esp. math. pour ce second coup est encore $\frac{1}{2}$.

Il peut gagner 4 ducats au 3e. coup : la prob. que cela arrivera est $\left(\frac{1}{2}\right)^3$. Donc son Esp. math. pour ce 3e. coup est toujours $\frac{1}{2}$.

Et il est évident que son esp. math. pour un coup qcq. est $\frac{1}{2}$.

Donc il pourrait vendre $\frac{1}{2}$ ducat ses droits sur un coup qcq. — Donc son Espérance mathématique totale est infinie.

Voilà le résultat clair et net de principes évidents. or

il est évident d'autre part qu'aucun homme raisonnable ne voudrait risquer à semblable jeu seulement 20 ou 30 ducats. — comment concilier cela ?

Voici la réponse, elle est bien simple : c'est qu'il n'est point raisonnable de jouer trop gros jeu. — Supposez qu'on vienne vous dire : je vais vous faire gagner un ~~mille~~ millions de millions : je vous donnerai une probabilité de gagner de un millionnième ; et, pour que le jeu soit équitable, vous me donnerez un million. — N'est-il pas clair que vous aimerez bien mieux garder votre million si vous l'avez que de vous exposer à le perdre pour une chance très-faible de gagner une énorme fortune. — C'est ainsi que personne ne voudra mettre un million sur un quine de la Loterie, même en supposant celle-ci rigoureusement équitable. — C'est ainsi que, si 25 personnes ont 100 fr. chacune pour tout bien, et si toutes mettent ces 100 fr. au jeu, puis jouent le tout sur un coup de dé, certes aucune d'elles ne pourra se dire lésée au profit des autres : et pourtant est-il juste, est-il raisonnable d'exposer 24 personnes à mourir de faim pendant que la 25e. mourra d'indigestion ?

Tout cela tient à ce que les bases mêmes de tous nos raisonnements antérieurs sont contestables quand il s'agit de trop fortes sommes, et qu'il ne faut jamais confondre les mots Justice, Equité, avec celui d'avantages égaux.

Mr. Poisson s'est arrêté pour ce paradoxe à une explication assez singulière, bien qu'il l'ait répétée souvent et avec complaisance. — Pierre, disait-il,

vous promet une Somme Enorme dans une certaine Eventualité. Mais il ne vous la donnera pas, c'est bien sur ; puisqu'il ne la possède pas. Il vous fera Banqueroute au bout d'un certain nombre de coups. Calculez donc votre mise sur la Somme qu'il est Réellement en Etat de vous compter. — Cela n'est pas Sérieux.

Daniel Bernouilli, lui, avait inventé toute une Théorie pour Résoudre la difficulté.

Il arrive quelquefois que la Règle de l'Espérance mathématique permet de Résoudre facilement des problèmes sans cela très-compliqués. — Nous en donnerons deux Exemples.

Premier Exemple. — on a 4 boules dans une urne, numérotées 1, 2, 3, 4. Trois individus A, B, C jouent ensemble. Ils mettent chacun une certaine Somme, de façon qu'il y a S francs au Jeu. — Le premier, A, tire une Boule :

S'il amène 1, il prend tout ;
——— 2, ——— la moitié de S ;
——— 3, il ne prend rien ;
——— 4, il double l'enjeu total S.

Quand il a joué, il reste une nouvelle masse S', et B joue dessus de la même manière. — Puis C agit de même, et ainsi de suite. — Il est Evident que ce Jeu aura une fin, parce que la Boule 1 sortira nécessairement tôt ou tard : — et le dernier gagnant ne sera pas toujours le plus favorisé, c'est assez clair. — Dans quels Rapports doivent

être les mises des 3 Joueurs ?

Supposons que A ne se soucie pas de jouer le premier coup, et veuille vendre ses droits sur ce coup à ses camarades. Quelle portion de S devra-t-on lui rendre pour cela ? — Il a une probabilité $\frac{1}{4}$ de gagner S,

———— $\frac{1}{4}$ ———— $\frac{S}{2}$

———— $\frac{1}{4}$ ———— 0

———— $\frac{1}{4}$ ———— $-S$

Donc son Espérance mathématique pour le premier coup est $\frac{1}{4}S + \frac{1}{8}S - \frac{1}{4}S$ ou $\frac{1}{8}S$. — Donc on devra lui donner $\frac{1}{8}$ de S, et il restera au jeu $\frac{7}{8}$ de S.

Supposons que B ne veuille pas jouer non plus le second coup : on lui donnera $\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot S$, et il restera au jeu $\left(\frac{7}{8}\right)^2 S$.

Si B ne se soucie pas plus de jouer le 3e. coup, on lui donnera $\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2 S$ et il restera $\left(\frac{7}{8}\right)^3 S$.
et ainsi de suite indéfiniment.

Donc A devra recevoir successivement

$$\frac{1}{8}S + \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3 S + \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^6 S + \cdots$$

B devra recevoir

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot S + \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^4 S + \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^7 S + \cdots$$

et C

$$\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2 S + \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^5 S + \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^8 S + \cdots$$

Les sommes de ces trois progressions géométriques sont respectivement

$$\frac{\frac{1}{8}S}{1-\left(\frac{7}{8}\right)^3}, \quad \frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8}S}{1-\left(\frac{7}{8}\right)^3} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2 S}{1-\left(\frac{7}{8}\right)^3}$$

Donc les mises des trois Joueurs A, B, C devront être entre elles comme les nombres 64, 56 et 49.

Second Exemple. — Je suppose deux Joueurs,

A possédant m jetons

B —— n ——

et jouant de façon que A ait une probabilité p

B ———— q

de gagner chaque partie. à chaque partie, le perdant donne un jeton au gagnant, et ils continuent jusqu'à ce que l'un des deux soit ruiné. Je demande la probabilité pour que A ruine B.

Il est clair d'abord que cette probabilité restera absolument la même quelles que puissent être les valeurs que je supposerai aux différents jetons, pourvu que toujours A et B jouent un jeton contre un autre. — arrangeons-nous de manière que le jeu devienne équitable, afin que nous puissions appliquer la règle de l'Espérance mathématique. Soit $\frac{q}{p} = \alpha$. Supposons que les jetons de A et de B aient les valeurs

$$\overbrace{\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots\ \alpha^{m-1},\ \alpha^m}\ \Big|\ \overbrace{\alpha^{m+1},\ \alpha^{m+2},\ \ldots\ \alpha^{m+n}}$$

Supposons que A joue α^m contre B, α^{m+1}. Si A gagne, il jouera ensuite α^{m+1} contre B α^{m+2}, et ainsi de suite : de quelque manière que voyage la ligne de séparation entre les jetons des deux Joueurs, ils joueront toujours les deux jetons qui y sont adjacents. De cette façon chaque partie sera juste, et le jeu total le sera lui-même. — Cherchons les

espérances mathématiques. Celle de A est égale à sa mise, $\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^m$. Elle sera égale à sa probabilité de gagner, x, par la somme totale des enjeux, $\alpha + \cdots + \alpha^{m+n}$. Donc

$$(\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m+n})\, x = (\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^m)$$

$$x = \frac{\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^m}{\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m+n}}$$

$$= \frac{\alpha^{m+1} - \alpha}{\alpha^{m+n+1} - \alpha} = \frac{\alpha^m - 1}{\alpha^{m+n} - 1}$$

Si $p = q$, et par conséquent $\alpha = 1$, $x = \frac{0}{0}$. Mais en prenant les dérivées, on a $x = \frac{m}{m+n}$. — Ces résultats ont déjà été obtenus plus longuement par une autre méthode.

J'ai dit en passant que Daniel Bernoulli avait inventé une théorie pour expliquer le paradoxe du problème de Petersbourg. Cette théorie est celle de l'Espérance morale.

Voici en peu de mots en quoi elle consiste.

L'accroissement de la fortune d'un individu étant constant, l'avantage réel qui en résultera pour cet individu n'est pas toujours le même. Si quelqu'un possède 100.000 fr. et vient à gagner 10 fr., cela ne lui procure pas un avantage bien marqué. S'il n'a pas le sou et qu'il vienne à gagner ces 10 f. ce sera au contraire pour lui un bénéfice important. — Donc, pour bien apprécier l'avantage que procure un gain déterminé,

on doit tenir compte de la fortune du Gagnant?

Tout cela est incontestable.

Maintenant, D. Bernoulli pose à priori cette Règle :

Si un individu possède une fortune x, et que cette fortune reçoive un accroissement dx, l'avantage réel qui en résultera pour cet individu est proportionnel à $\frac{dx}{x}$.

Cette Règle est complètement arbitraire, et les résultats qu'elle donnera ne peuvent être que des nombres de fantaisie.

Si la fortune x est nulle, le moindre gain, 1 sou, procurerait donc un avantage infini?

Pour répondre à cette objection qui se présente immédiatement, D. Bernoulli déclare qu'il n'existe pas un individu ne possédant absolument rien. Car, dit-il, prenez l'individu le plus misérable, nu et prêt à mourir de faim dans un quart d'heure; si vous lui proposiez de renoncer absolument à tout ce qu'il peut acquérir plus tard par son travail et par les facultés qui sont en lui, il ne le fera certes pas à moins d'une somme considérable. — Donc la fortune x devra être regardée comme embrassant et la fortune matérielle, et toute celle qu'on peut espérer pour plus tard. — On sent d'après cela qu'il est impossible d'apprécier x avec exactitude.

Supposons que la fortune x d'un individu augmente de a. Cherchons l'avantage qui en résultera pour lui. Cet avantage sera représenté par l'expression

$$\lim \left[\frac{dx}{x} + \frac{dx}{x+dx} + \frac{dx}{x+2dx} + \cdots + \frac{dx}{x+\alpha} \right]$$

ou

$$\int_x^{x+\alpha} \frac{dx}{x} = \mathcal{L}\left(\frac{x+\alpha}{x}\right) = \mathcal{L}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)$$

L'avantage cherché a donc pour expression $\mathcal{L}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)$. Ce Logarithme représentera l'Espérance morale d'un individu dont la fortune est x, pourvu qu'on le multiplie par la probabilité qu'il a de gagner la somme α.

D'après cette règle, il n'est pas difficile de montrer que deux joueurs qui jouent à jeu égal font tous les deux, en se mettant au jeu, un marché désavantageux. — Supposons en effet deux joueurs qui ont, pour toute fortune, 100 fr. chacun, et qui en jouent 50 pour se distraire : après le jeu, le gagnant possèdera 150 fr. et le perdant, 50. Je dis qu'avant la fin de la partie, les joueurs sont dans un état plus désagréable que s'ils ne jouaient pas, leurs craintes de perte sont plus grandes que leurs espérances de ~~gage~~ gain. — En effet, pour le gagnant, l'avantage réel sera $\mathcal{L}\left(1+\frac{50}{100}\right)$ ou $\mathcal{L}.\frac{3}{2}$. Comme la probabilité que cela arrivera est $\frac{1}{2}$, son Espérance morale est $\frac{1}{2}\mathcal{L}.\frac{3}{2}$ ou $\mathcal{L}.\sqrt{\frac{3}{2}}$: c'est la mesure de l'avantage qu'un des joueurs peut espérer par la chance de gagner. — Maintenant, le perdant perd 50f. — Pour apprécier quel est le désavantage que cette perte lui occasionne,

il est clair qu'il suffit de chercher quel est l'avantage qu'on lui procurerait en lui rendant ses 50 fr. Car, en agissant ainsi, on détruirait tout son chagrin : donc l'avantage qu'on lui ferait aura même mesure que la perte qu'il aurait éprouvée. Cette mesure sera $\mathcal{L}\left(1+\frac{50}{50}\right)$ ou $\mathcal{L}.2$. — La probabilité que cela arrivera est $\frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{2}\mathcal{L}2$ ou $\mathcal{L}.\sqrt{2}$ mesure le désavantage que chaque joueur peut appréhender par la chance de perdre.

Ainsi, chaque joueur devra représenter ses espérances par $\mathcal{L}.\sqrt{\frac{3}{2}}$ et ses craintes par $\mathcal{L}.\sqrt{2}$. — Donc l'inconvénient qu'il y a à se mettre au jeu est mesuré pour lui par $\left[\mathcal{L}.\sqrt{2} - \mathcal{L}.\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ ou $\mathcal{L}.\sqrt{\frac{4}{3}}$.

Mais, pour que ce résultat frappe mieux l'esprit, cherchons la somme y qu'on devrait prendre à chaque joueur pour qu'il en résultât pour lui une perte égale à celle qu'il éprouve réellement en se mettant au jeu. — Si on lui prend $y^{fr.}$, il aura $(100-y)^{fr.}$. Si on les lui rend, le bénéfice qu'on lui fera faire sera $\mathcal{L}\left(1+\frac{y}{100-y}\right)$, sans coefficient, vu qu'il s'agit d'un événement certain. — Donc ce Log. exprime aussi la perte qu'il éprouve quand on lui prend $y^{fr.}$ Donc on devra avoir

$$\mathcal{L}.\sqrt{\frac{4}{3}} = \mathcal{L}\left(1+\frac{y}{100-y}\right)$$

$$\sqrt{\frac{4}{3}} = 1+\frac{y}{100-y}$$

d'où l'on tire facilem^t.

$$y = 100 \cdot \frac{\sqrt{\frac{4}{3}} - 1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}$$

Si l'on réduit en nombres, on trouve pour y une valeur de 10 à 12 fr. — ainsi, il vaudrait autant jeter 10 fr. par la fenêtre que de se mettre à jouer dans les conditions du jeu qui nous occupe.

D. Bernoulli applique sa règle à une question d'assurances ; la voici.

Un individu envoie un vaisseau en mer, et le fait assurer. à quel taux a-t-il intérêt à le faire assurer ? — on suppose connue la probabilité que le vaisseau se perdra.

Supposons un négociant qui possède en tout 100.000^fr. Il en met 25.000 sur un vaisseau : la probabilité que celui-ci se perdra est $\frac{1}{10}$ par ex. (nombre très-exagéré : mais on veut seulem^t. indiquer la méthode de calcul). — Si le négociant perd ses 25000 fr. il n'en possédera plus que 75.000. La perte qu'il en éprouvera sera $\mathcal{L}\left(1+\frac{25}{75}\right)$ ou $\mathcal{L}\left(\frac{4}{3}\right)$. La probab. que cela arrivera est $\frac{1}{10}$. Donc les craintes qu'il doit concevoir sont mesurées par $\frac{1}{10}\mathcal{L}.\frac{4}{3}$ ou $\mathcal{L}.\sqrt[10]{\frac{4}{3}}$.

Supposons maintenant que, moyennant une somme x, on lui assure que son navire ne périra pas. La perte qu'il éprouve en donnant cette somme x

est égale à l'avantage qu'on lui ferait en la lui rendant, ou à $\mathcal{L}\left(1+\frac{x}{100000-x}\right) = \mathcal{L}.\frac{100000}{100000-x}$

ainsi, le taux x que l'on sera en droit de demander au négociant sera donné par l'équation

$$\mathcal{L}.\sqrt[10]{\frac{4}{3}} = \mathcal{L}.\frac{100000}{100000-x}$$

Enfin, voici encore un exemple que Bernouilli choisit pour y appliquer sa théorie.

Supposons un individu qui veut transporter une certaine somme des colonies en Europe. A-t-il avantage à l'embarquer sur un seul vaisseau ou sur plusieurs ? D. Bernouilli conclut que, plus il y aura de vaisseaux, moins on devra craindre pour sa fortune : tandis que la règle ordinaire du calcul des probabilités dirait que l'avantage est le même de quelque façon qu'on agisse. Car, supposons que la somme embarquée soit S. Soit $\frac{1}{10}$ la probabilité que le vaisseau se perde, et par suite $\frac{9}{10}$ celle qu'il ne se perde point. L'espérance mathématique de conserver sa fortune est, si on l'embarque sur un seul vaisseau, $\frac{9}{10}.S$; — et, si on l'embarque sur n vaisseaux, c'est $\frac{9}{10}\left(\frac{S}{n}+\frac{S}{n}+\cdots\right)$ ou $\frac{9}{10}S$ encore.

Appliquons au contraire la règle de D. Bern. Soit toujours S la somme à embarquer. Et soit A la fortune qui vous reste indépendam[t]. de S. Vous embarquez S sur un vaisseau. Vous devez avoir une crainte de perdre exprimée par



$$\mathcal{L}.\sqrt[10]{1+\frac{S}{R}} \quad .$$

Si maintenant vous expédiez S sur deux vaisseaux, $\frac{S}{2}$ sur chacun : – alors, plusieurs évènements sont possibles. ou vous ne perdrez rien, ce dont la probab. est $\left(\frac{9}{10}\right)^2$; ou vous perdrez tout, ce dont la probab. est $\left(\frac{1}{10}\right)^2$; ou vous perdrez seulemt. $\frac{S}{2}$, ce dont la probabilité est p. $\left(p = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \left(\frac{1}{10}\right)^2\right)$ Donc cette fois-ci, vos craintes seront représentées par la somme

$$\mathcal{L}\sqrt[100]{1+\frac{S}{R}} + \mathcal{L}\sqrt[p]{1+\frac{\frac{S}{2}}{R+\frac{S}{2}}}$$

et il est facile de reconnaître que cette somme est plus petite que $\mathcal{L}\sqrt[10]{1+\frac{S}{R}}$. – L'extension à un plus grand nombre de vaisseaux est évidente.

Ce résultat est du reste conforme à ce qu'indique le simple bon sens.

Et en général, D. Bernouilli a raison au fond, et ses nombres indiquent bien de quel côté est la vérité. Mais il a tort de vouloir faire une théorie mathématique sur des quantités qu'il est impossible d'évaluer numériquement.

Nous passons à présent à un autre ordre de questions, tout-à-fait différent de ce que nous avons vu jusqu'ici.

On suppose un évènement arrivé ; et l'on a observé la manière dont il s'est passé. Cet évènement pouvant être attribué à plusieurs causes dont on connait les influences respectives, on demande les probabilités que telles ou telles de ces causes aient agi pour produire l'évènement observé.

Par exemple : on a deux urnes, contenant

l'une, un nombre qcq. de blanches, et 0 noires ;

l'autre, une blanche et 25 noires.

on prie quelqu'un d'aller chercher une boule n'importe dans quelle urne. on rapporte une blanche. Il est clair que, selon toute probabilité, on l'a tirée de la première urne. – Ce sont les probabilités de ce genre que nous allons nous occuper d'apprécier.

Voici tout de suite le principe général.

Lorsqu'un évènement peut être attribué à plusieurs causes, toutes également probables à priori, les probabilités de ces différentes causes (manière abrégée de dire : les probab. respectives que chacune de ces différentes causes ait agi seule) sont entre elles comme les probabilités que ces diverses causes, agissant seules, donneraient à l'arrivée de l'évènement tel qu'il a été observé.

ainsi, dans l'exemple que nous prenions tout-à-l'heure, il est également probable à priori qu'on mettra la main dans la première urne ou qu'on la mettra dans la seconde. Or les probabilités p et q que l'on ait pris dans la 1ère urne, et qu'on ait tiré dans la seconde, sont entre elles comme les probabilités 1 et $\frac{1}{26}$ que l'on aurait de tirer une blanche dans la première urne et dans la seconde. Et comme $p+q=1$, on aura donc $p=\frac{26}{27}$ et $q=\frac{1}{27}$.

Il s'agit de démontrer cette règle générale.

Supposons que les causes dont on cherche les probabilités respectives soient représentées par un certain nombre d'urnes : l'événement observé sera la sortie d'une boule de certaine couleur. Ces urnes contiendront des boules blanches et des noires de façon que, dans chacune d'elles, la 3e. par exemple, p_3 sera la probabilité de tirer une blanche, et q_3 la prob. de tirer une noire : d'ailleurs le nombre de ces boules sera b_3 pour les blanches, n_3 pour les noires. Toutes ces urnes seront parfaitement semblables, de façon qu'il y aura chances égales de mettre la main dans l'une qcq. d'entre elles.

On tire une blanche.

Quelle est la probabilité qu'elle a été tirée de la première urne par exemple ?

Je puis toujours, sans altérer les probabilités $p_1, p_2 \ldots$

$q_1, q_2, \ldots$ supposer que le nombre total des boules est le même dans toutes les urnes : soit N ce nombre. alors, chaque boule de la 1ère urne a autant de chances de sortir qu'une boule quelconque d'une autre urne. — Donc, sans rien changer aux conditions du tirage, je pourrai verser toutes les boules dans une seule urne, qui contiendra alors $(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots)$ noires et $(b_1 + b_2 + \ldots)$ blanches, en tout mN boules s'il y avait m urnes (et $N = n_1 + b_1 = n_2 + b_2 = \ldots$). — alors, la probabilité qu'une qcq. des blanches sortira est la même pour toutes : et la probabilité que la blanche sortie appartiendra au groupe des b_1 blanches qui étaient dans la première urne sera évidemt.

$$\frac{b_1}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{b_1}{N}}{\frac{b_1}{N} + \frac{b_2}{N} + \cdots}$$

ou enfin

$$\frac{p_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_m}$$

quantité proportionnelle à p_1 cqfd.

Voici une autre démonstration plus simple, mais plus délicate.

appelons $p_1, p_2, p_3, \ldots p_m$ les probabilités que les différentes causes donneraient d'avance à l'événement observé. — $\frac{1}{m}$ est la probabilité que l'une de ces causes en particulier, la première par ex., ait agi seule.

Supposons que l'on cherche à priori la probabilité pour que la première cause agisse seule, et amène

tel qu'il a été observé. Cette probab. est $\frac{1}{m} p_1$.

Maintenant, cette probabilité, on peut l'évaluer autremt. Il faut 1°. que l'Évènemt. arrive ; 2°. qu'il soit produit par la cause (1) : c'est là une probab. composée. — or 1°. la probabilité que l'Évènemt. arrivera, n'importe comment, est

$$\frac{1}{m} p_1 + \frac{1}{m} p_2 + \cdots + \frac{1}{m} p_m$$

et 2°. la probab. qu'il sera produit par la première cause est l'inconnue x.

Donc

$$\frac{1}{m} p_1 = \left[\frac{1}{m} p_1 + \frac{1}{m} p_2 + \cdots + \frac{1}{m} p_m\right] x$$

$$x = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_m}$$

C q f D.

Cette seconde démonstration s'étend facilement au cas où les différentes causes sont inégalement probables à priori.

Supposons que les probabilités à priori pour que les différentes causes agissent soient q_1 q_2 $q_3 \cdots$ et qu'elles donnent toujours à l'Évènement observé les probabilités $p_1, p_2, p_3, \cdots p_m$. — L'Évènement arrivé, on demande la probabilité x que la première cause a agi.

Plaçons-nous à l'époque où l'Évènement n'avait pas encore eu lieu. à priori, la probabilité que la première cause agira, et le produira tel qu'il doit être observé, est $p_1 q_1$.

on peut évaluer cette probabilité autrement. Car il faut : 1°. que l'événement arrive, n'importe comment, ce dont la probabilité est (Règle des probab. totales), $p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_m q_m$.
et 2°. qu'il arrive produit par la première cause ; ce dont la probabilité est x.

Donc

$$p_1 q_1 = (p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_m q_m)\, x$$

$$x = \frac{p_1 q_1}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_m q_m}$$

Donc la probabilité pour que l'événement observé soit dû à une certaine cause est proportionnelle au produit de la probabilité de cette cause à priori par la probabilité que cette cause donne à l'événement observé.

On peut déduire de là comme corollaire une Règle qui permet de calculer la probabilité des événements futurs d'après l'observation des événements passés.

Voici comment.

On sait que plusieurs causes, dont les probabilités à priori sont $q_1, q_2, q_3, \ldots$ peuvent agir pour produire un certain événement : et qu'elles donnent à cet événement les probabilités $p_1, p_2, p_3, \ldots$
On fait une première épreuve, et l'événement arrive. Quelle est la probabilité pour qu'une seconde épreuve faite en faisant agir la même cause, redonne le

même Résultat ? – on ne sait pas quelle est la cause agissante, mais on sait qu'elle agit deux fois de suite.

Supposons un instant que ce soit la première cause qui agisse. La probabilité pour cela est $\frac{p_1 q_1}{\Sigma . p_1 q_1}$: – et la probabilité pour que cette cause, qu'on sait agir de nouveau, amène une seconde fois le même évènement, est $p_1 \frac{p_1 q_1}{\Sigma . p_1 q_1}$. Telle serait la probabilité cherchée, si l'on était sûr que la première cause fût la cause agissante. – Mais comme cela peut être tout aussi bien une des autres, la probabilité cherchée sera donc une probabilité totale, ayant pour valeur

$$p_1 \frac{p_1 q_1}{\Sigma . p_1 q_1} + p_2 \frac{p_2 q_2}{\Sigma . p_1 q_1} + \cdots$$

ou

$$\frac{\Sigma . p_1^2 q_1}{\Sigma . p_1 q_1}.$$

Problème.

Un Événement a une probabilité complètement inconnue, sur laquelle on n'a absolument aucune donnée : elle peut être nulle, être égale à 1, ou avoir une valeur quelconque intermédiaire : nous sommes là-dessus dans la plus parfaite ignorance. — on observe cet événement, qui arrive de deux façons : — et, sur $m+n$ Épreuves, on trouve que l'Événement arrive m fois et son contraire n fois. — Quelle est la probabilité que l'Épreuve suivante amènera l'Événement, ou qu'elle amènera le contraire ?

L'Événement a par lui-même une certaine probabilité, qui nous est inconnue : — j'entends, qu'il a une certaine probabilité pour un individu qui connaîtrait tout ce qu'il y a de commun entre les différentes Épreuves, mais non tout ce qui dépend du hasard dans chaque Épreuve particulière : car, ainsi que nous l'avons observé tout d'abord, la notion de probabilité ferait place alors à celle de certitude. — Soit donc x cette probabilité, qui est quelconque, entre 0 et 1.

Si nous partageons l'espace entre 0 et 1 en K intervalles extrêmement petits

$$0 \quad dx \quad 2dx \quad 3dx \quad \ldots \; p\,dx \quad \ldots \; K dx = 1$$

la probabilité que x sera dans un de ces intervalles en particulier est $\frac{1}{K}$, ou dx : — supposons dans le $p^{ième}$ intervalle,

Les différentes causes qui peuvent avoir amené l'Evènement observé m fois et son contraire n fois répondent d'ailleurs à ces divers intervalles.

ainsi, la probabilité à priori du $p^{ième}$ intervalle est dx.

La probabilité que cet intervalle (auquel répond la probab. x de l'évènem^t^) assigne à m Evènements favorables et à n défavorables est

$$\frac{1.2\ldots(m+n)}{1.2\ldots m \cdot 1.2\ldots n}\, x^m(1-x)^n$$

Donc la probabilité que x soit dans cet intervalle, ou bien que cet intervalle soit la cause qui ait agi, si l'on peut s'exprimer ainsi, est la probabilité dx de cette cause à priori, multipliée par la prob. qu'elle assigne à l'Evènem^t^. observé, le tout divisé par la somme des produits analogues. C'est donc

$$\frac{x^m(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx}$$

Maintenant, en supposant que x soit bien dans le $p^{ième}$ intervalle : la probabilité que la $(m+n+1)^{ième}$ Epreuve amènera l'Evènement est

$$\frac{x^{m+1}(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx}$$

Telle est la probabilité demandée si x est dans le $p^{ième}$ intervalle. — Mais par hypothèse, il peut être tout aussi bien dans un quelconque des autres, sans qu'on sache rien là-dessus. — Donc, par la Règle

des probabilités totales, on voit que la probabilité cherchée sera

$$\frac{\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx}.$$

on peut intégrer : car on sait (intégrales eulériennes) que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

avec la relation

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1).$$

Donc le rapport de nos deux intégrales sera

$$\frac{\Gamma(m+2)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(m+n+3)}$$

ou

$$\frac{m+1}{m+n+2}$$

Telle est la probabilité demandée pour que le prochain événement arrive favorablement.

On voit que, si m et n augmentent, la fraction converge rapidement vers $\frac{m}{m+n}$: ce qui est le résultat qu'on eût été tenté de donner à priori.

Ce résultat est très simple, et assez remarquable. — Malheureusement on n'a presque jamais occasion de s'en servir : car il est excessivement rare qu'on n'ait aucune donnée sur la grandeur

de la probabilité d'un événement donné : — et cette hypothèse est indispensable pour que les calculs précédents subsistent.

Théorème de Bernouilli.

Soit p la probabilité d'un Evénement, q celle de l'Evénement contraire ($p+q=1$) : — Si l'on fait un très-grand nombre d'épreuves, les unes, en nombre m, amenant l'Evénement, les autres, en nombre n, amenant l'Evénement contraire, — il est à peu-près certain que $\frac{m}{n}$ différera très-peu de $\frac{p}{q}$: — et l'on peut assigner un nombre d'épreuves assez grand pour que, selon toute probabilité, la différence des deux rapports soit plus petite que tout ce qu'on voudra.

Rappelons-nous ce principe, sur lequel nous nous sommes encore appuyés tout-à-l'heure, que dans le développement

$$(p+q)^m = p^m + m p^{m-1} q + \frac{m(m-1)}{1.2} p^{m-2} q^2 + \cdots$$
$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{1.2\cdots k} p^{m-k} q^k + \cdots + q^m$$

un terme qcq. représente la probab. pour que, sur m épreuves, l'Evénemt. et son contraire arrivent ~~respec-tivement un nombre~~ chacun un nombre de fois marqué par l'exposant de sa probabilité à priori.

Commençons par chercher quels sont les nombres les plus probables d'Evénements favorables et défavorables qui arriveront sur m épreuves : — en d'autres termes, quel est le terme le plus grand du développemt. du binôme —

Prenons pour cela le Rapport d'un terme au précé-dent : c'est

$$\frac{q}{p}\cdot\frac{m-k}{k+1}$$

Tant que ce Rapport sera plus petit que 1, les termes successifs iront en croissant : s'il devient égal à 1, deux termes seront égaux ; enfin quand il deviendra plus grand que 1, les termes diminueront. — Cherchons donc quelle est la condition à laquelle k doit satisfaire pour que ~~k~~ ce Rapport devienne supérieur à 1. on aura

$$\frac{q}{p}\cdot\frac{m-k}{k+1} > 1$$

$$qm - qk > pk + p$$

$$qm - p > (p+q)\,k$$

$$> k$$

$$k < mq - p$$

on prendra donc pour k le plus grand nombre entier contenu dans $mq - p$: et alors le plus grand terme du binôme correspondra à l'exposant de ~~p~~ q égal à $k+1$; — ou bien, si l'on prend le plus grand nombre entier k compris dans $mq - p + 1$ ou dans $(m+1)q$, ce nombre sera l'exposant de q dans le plus grand terme du binôme. L'exposant de p sera de même le plus grand nombre entier compris dans $(m+1)p$. Le Rapport de ces deux exposants convergera vers $\frac{q}{p}$ si m augmente indéfiniment ; — donc le plus grand

terme du Binôme est celui où les exposants de p et de q sont dans le Rapport $\frac{p}{q}$: et l'événement le plus probable est celui où les deux modes contraires de cet événement arriveront des nombres de fois proportionnels à leurs probabilités Respectives.

Mais ce cas, qui est le plus probable quand m augmente beaucoup, est lui-même extrêmement peu probable : sa probabilité est très-faible, bien qu'elle soit la plus grande de toutes.

Il peut voir pour le prouver que le plus grand terme du Binôme converge vers zéro si m augmente indéfiniment. – Ce terme peut s'écrire

$$\frac{1.2\ldots\ldots m}{1.2\ldots k\,.\,1.2\ldots(m-k)}\, p^{m-k} q^{k}$$

et il ne serait pas difficile de s'assurer qu'il tend vers zéro si m augmente indéfinim^t. – Mais on peut en donner une Raison très-simple. La Somme de tous les termes du Binôme qui nous occupe est égale à 1. or, le Rapport $\frac{q}{p}\cdot\frac{m-k+1}{k+1}$ d'un terme p au précédent varie très-peu si k varie lui-même très-peu : mais, si m augmente indéfinim^t. il en est de même de k, et alors k pourra varier d'une quantité très-grande qui cependant ne soit pas comparable à sa valeur initiale. – Mais alors, le Rapport en question variant très-peu, et étant égal à 1 pour le plus grand terme du Binôme, il s'ensuit qu'il y aura à droite et à gauche de ce terme un

grand nombre d'autres termes qui lui seront presque égaux : mais qui seront individuellement fort petits puisque leur somme est toujours inférieure à 1.

Maintenant, je considère, à droite et à gauche du plus grand terme, un certain groupe que je représente ainsi :

$$p^m + \cdots + \frac{m \ldots (m-k-i-1)}{1.2 \ldots (k-i)} p^{m-k+i} q^{k-i} + \cdots + \frac{m \ldots (m-k+1)}{1.2 \ldots k} p^{m-k} q^{k} + \cdots + \frac{m \ldots (m-k+i-1)}{1.2 \ldots (k+i)} p^{m-k-i} q^{k+i} + \cdots + q^m$$

ce groupe et se compose de deux parties, l'une à droite et l'autre à gauche du plus grand terme que j'ai écrit au milieu : — et il est complètement défini par la valeur qu'on donnera au nombre arbitraire i. Je suis libre d'assujettir i à telle condition que je voudrai. Je prends celle-ci : le rapport $\frac{i}{m}$ ou $\frac{i}{k}$ (ce qui revient au même, puisque le rapport $\frac{k}{m}$ est fini et converge vers q) restera constant et excessivement petit : $\frac{i}{k} = \frac{1}{1000000}$ par exemple : quand m et k augmenteront indéfiniment. — alors la somme des termes du groupe que je considère représentera la probabilité pour que le rapport du nombre des événements dont la probabilité est p au ——————— ——————— q soit compris entre deux limites $\frac{m-k+i}{k+i}$ et $\frac{m-k-i}{k+i}$ dont chacune diffère extrêmement peu de $\frac{m-k}{k}$,

ou de sa limite $\frac{p}{q}$. — Si donc je prouve que la somme des termes de ce groupe, qui ne renferme pourtant qu'un nombre de termes très-faible relativement au nombre de termes de tout le développem^t. si cette somme, dis-je, finit par différer de 1 d'aussi peu qu'on voudra, il sera bien clair que le rapport des nombres d'événements finira, selon toute probabilité, par différer extrêmement peu du rapport $\frac{p}{q}$ de leurs probabilités.

ainsi, les termes de notre groupe sont les plus grands de tous, mais de beaucoup les moins nombreux: il faut voir que leur grandeur fait plus que compenser leur petit nombre, et que leur somme est aussi grande que l'on veut par rapport à celle de tous les termes qui restent en dehors, à droite et à gauche du groupe considéré.

Je considère le rapport du plus grand terme à celui qui le précède: c'est

$$\frac{q}{p}\cdot\frac{m-k+1}{k}$$

Le rapport du plus grand terme à celui qui le précède de deux rangs est

$$\frac{q^2}{p^2}\cdot\frac{(m-k+1)(m-k+2)}{k\cdot(k-1)}$$

Son rapport à celui qui le précède de 3 rangs:

$$\frac{q^3}{p^3}\cdot\frac{(m-k+1)(m-k+2)(m-k+3)}{k(k-1)(k-2)}$$

Enfin le Rapport de ce plus grand Terme à celui qui le précède de i Rangs, c.à.d. au premier des termes du Groupe, sera

$$\frac{q^i}{p^i} \cdot \frac{(m-k+1)(m-k+2)\ldots(m-k+i)}{k(k-1)(k-2)\ldots(k-i)}$$

ce qu'on peut écrire encore

$$\left(\frac{q}{p}\cdot\frac{m-k+1}{k}\right)\left(\frac{q}{p}\cdot\frac{m-k+2}{k-1}\right)\ldots\left(\frac{q}{p}\cdot\frac{m-k+i}{k-i}\right)$$

Je dis que ce produit deviendra aussi grand qu'on le voudra. Car: d'abord, il contient autant de facteurs qu'on veut, il suffit pour cela de faire croître m, par suite i. Les premiers facteurs diffèrent très-peu de l'unité, puisque $Lim. \frac{m-k}{k} = \frac{p}{q}$. Le dernier facteur, au contraire, et ~~ce~~ diffère en plus de l'unité d'une quantité qui ne tend pas vers zéro: et il en est de même de tous ceux qui sont vers la fin du produit, par ex. qui composent la seconde moitié de la suite des facteurs. Donc le produit total augmente indéfiniment: il est plus grand que h, h étant une certaine quantité qui augmente indéfiniment.

Donc le plus grand terme M est supérieur à h fois celui qui le précède de i Rangs. Donc ce terme dernier terme est inférieur à $\frac{M}{h}$.

Remarquons maintenant que le Rapport d'un terme au précédent décroît toujours quand on s'avance de gauche à droite (car touj. $\frac{m-p}{p+1} > \frac{m-p-1}{p+2}$):

et par suite, il en est de même pour le rapport d'un terme à celui qui le précède de i rangs.

Donc :

Si le terme M est plus grand que h fois celui qui le précède de i rangs,

à fortiori celui-ci sera-t-il plus grand que h fois celui qui le précède aussi de i rangs,

à fortiori celui-ci sera-t-il aussi plus grand que h fois celui qui le précède de i rangs,

et ainsi de suite tant qu'on trouvera des termes en sautant ainsi de i rangs en i rangs.

Donc à fortiori, le terme le plus grand M sera-t-il plus grand que la somme

$$\frac{M}{h} + \frac{M}{h^2} + \frac{M}{h^3} + \cdots$$

somme dont les termes sont respectivement plus petits aura tous ses termes respectivement plus grands que les termes qui précèdent M de i rangs, de 2i rangs, de 3i rangs, etc. — Donc la somme de tous les termes sera plus petite à fortiori que

$$M\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^3} + \cdots\cdots\right)$$

ou que

$$M\,\frac{\frac{1}{h}}{1-\frac{1}{h}} \quad \text{ou} \quad \frac{M}{h-1}$$

quantité infiniment petite par rapport à M quand h devient très-considérable.

on voit ensuite, à fortiori, vu la croiss. décroissance du Rapport d'un terme à celui de i Rangs, que chaque terme de la partie gauche du groupe est infini par Rapport à la somme de ceux qui le précèdent de i, de 2i, de 3i, .. rangs.

comme d'ailleurs évidemment, on trouve ainsi tous les termes qui sont à gauche du Groupe, il s'ensuit que la partie Gauche du groupe est infiniment grande par Rapport à la somme des termes qui précèdent le Groupe lui-même.

Maintenant, vu la Symétrie du Développemt. du Binôme par Rapport aux lettres p et q, il est clair que la partie droite du Groupe est aussi infint. grande par Rapport à la somme des termes qui suivent le Groupe lui-même.

Donc le Groupe entier est infiniment grand par Rapport à tout le Reste du Développemt.

et par suite le Théorème de Bernoulli se trouve Démontré.

Démontrons pour terminer, une formule très-souvent utile dans les applications du calcul des probabilités.

Si n augmente indéfiniment, on a

$$\lim \frac{1.2.3\ldots n}{e^{-n} n^{n} \sqrt{2n\pi}} = 1$$

Pour le démontrer, considérons l'intégrale

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-x} x^n dx = \Gamma(n+1) = 1.2.3\ldots n$$

Cette intégrale représente l'aire d'une courbe dont l'Eq. est

$$y = e^{-x} . x^n$$

en considérant l'aire comprise entre la courbe, qui passe par l'origine, et l'axe des x, auquel la courbe est asymptote.

Cherchons le maximum de y. – La valeur de x correspondante sera donnée par l'Eq.

$$(2) \qquad -e^{-x} x^n + n x^{n-1} e^{-x} = 0$$

d'où

$$x = n$$

donc la valeur maxima de y est

$$y = e^{-n} n^n$$

Posons
$$y = e^{-n} n^n e^{-t^2}$$

e^{-t^2} sera une quantité toujours plus petite que 1. — L'intégrale qui représente l'aire de la courbe sera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n} n^n e^{-t^2} \frac{dx}{dt} dt$$

Calculons $\frac{dx}{dt}$. Pour cela, reprenons l'Eq. (2), et prenons les logarithmes des deux membres. Il vient

$$(3) \qquad x - n\,\mathcal{L}x = n - n\,\mathcal{L}n + t^2$$

D'où, en différentiant,

$$\frac{dx}{dt} - \frac{n}{x}\frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{1-\frac{n}{x}} = \frac{2xt}{x-n} = 2t + \frac{2nt}{x-n}$$

Dans l'Eq. (3) je fais $x = n + U$: elle devient

$$n + U - n\,\mathcal{L}(n+U) = n - n\,\mathcal{L}n + t^2$$

D'où
$$t^2 = U - n\left\{\mathcal{L}(n+U) - \mathcal{L}n\right\}$$

or
$$\mathcal{L}(n+U) = \mathcal{L}n + \frac{U}{n} - \frac{U^2}{2(n+\theta U)^2}$$

θ étant plus petit que 1.

Donc
$$t^2 = \frac{nU^2}{2(n+\theta U)^2}$$

ou bien

$$t\sqrt{2}\,(n+\theta U) = U\sqrt{n}$$

D'où

$$U = \frac{nt\sqrt{2}}{\sqrt{n} - \theta t\sqrt{2}}$$

Substituant cette expression de U dans $x = n + U$, et portant cette valeur de x dans l'expression de $\frac{dx}{dt}$, on a

$$\frac{dx}{dt} = 2t + \frac{2nt}{nt\sqrt{2}}\left\{\sqrt{n} - \theta t\sqrt{2}\right\}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t + \sqrt{2n} - 2\theta t = \sqrt{2n} + 2t(1-\theta)$$

L'expression de l'aire de la courbe devient donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n} n^n e^{-t^2} dt \left\{\sqrt{2n} + 2t(1-\theta)\right\}$$

ou bien

$$e^{-n} n^n \sqrt{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt + e^{-n} n^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt . 2t(1-\theta)$$

La première Intégrale est égale à $\sqrt{\pi}$. — La seconde ne peut pas s'effectuer, parce que θ est une fonction de t tout-à-fait inconnue. — Mais sa valeur est très-petite par rapport à la valeur de la première. — En effet, séparons cette intégrale en deux autres :

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt . 2t(1-\theta) + \int_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt . 2t(1-\theta)$$

Remarquons que, dans chacune de ces Intégrales, les éléments sont de même signe. — or $\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt . 2t = -1$

Donc $\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt\, 2t(1-\theta) > -1$. D'ailleurs tous les éléments étant négatifs, cette Intégrale est comprise entre -1 et 0. — La Seconde Intégrale est de même plus petite que 1. Donc la somme de ces deux Intégrales est une quantité θ_1 comprise entre -1 et $+1$. — on a donc, pour l'aire S de la courbe,

$$S = e^{-n} n^n \sqrt{2n\pi}\left(1 + \frac{\theta_1}{\sqrt{2n\pi}}\right)$$

et l'on voit que, quand n croît indéfiniment, S converge vers $e^{-n} n^n \sqrt{2n\pi}$. — Mais en vertu de l'Eq. (1), S n'est autre chose que le produit $1.2 \ldots n$, Donc l'expression

$$\frac{1.2.3 \ldots n}{e^{-n} n^n \sqrt{2n\pi}}$$

converge vers l'unité quand n croît indéfiniment,

C.q.f.d.

Théorie
des
Quantités Négatives
et des
Quantités Imaginaires.

Cours de M^r. Duhamel
à la Sorbonne.

Des Quantités Négatives.

Un des objets de l'algèbre est de Généraliser, de Réunir sous un même Énoncé, dans une seule formule, la solution du plus grand nombre de questions possible. Un des moyens les plus Efficaces qu'elle emploie à cet Effet, c'est l'usage des Quantités Négatives.

Trop souvent, dans les cours Élémentaires, on introduit l'idée de ces quantités négatives sans expliquer convenablement leur objet et leur nature, et delà résultent des idées fausses. — Nous allons indiquer la marche qu'on doit suivre dans un cours Élémentaire pour exposer cette Théorie.

Soit donné un polynôme

$$a+b-c+d \ \ldots$$

Cet ensemble de termes ajoutés et retranchés signifie qu'à a il faut ajouter b, puis de la somme retrancher c, et ainsi de suite. — or cela revient en définitive à chercher la différence entre la somme de tous les termes additifs et la somme de tous les termes soustractifs, et cette différence est ce qu'on appelle la valeur du Polynôme. — Les valeurs attribuées à ses différents termes sont des valeurs purement arithmétiques, et l'on ne doit pas même supposer que la somme des termes soustractifs l'emporte sur celle des termes additifs, sans quoi le polynôme n'aurait plus de sens. Seule-

-ment on doit remarquer ici que si, pour un objet qcq, on trouve avantageux de placer les termes du polynôme dans un ordre différent, on peut le faire sans altérer la valeur du polynôme, et même on pourra mettre en tête un terme soustractif, bien qu'un pareil terme isolé ne signifie rien : pourvu qu'il soit bien entendu que la valeur du polynôme est toujours l'excès de la somme des termes additifs sur la somme des termes soustractifs.

On établit ensuite les règles dites des signes, pour les diverses opérations à effectuer sur les polynômes.

Addition et soustraction. — On établit par les raisonnements ordinaires que, pour ajouter entre eux deux polynômes, il faut les écrire l'un à la suite de l'autre en conservant les signes ; — que, pour retrancher un polynôme d'un autre, il faut l'écrire à la suite de cet autre en changeant les signes de tous ses termes. — Ces règles se démontrent tout naturellement, en supposant, comme on doit toujours le faire, que la somme des termes additifs des polynômes l'emporte sur la somme des termes négatifs soustractifs, et de plus, que les termes du polynôme soient disposés de telle sorte que les soustractions successives qu'ils indiquent soient toutes possibles, dans l'ordre où elles se présentent : — et la règle s'étend aisément au cas où les termes des polynômes sont disposés dans un ordre qcq., au moyen de la convention faite précédemment.

Multiplication. — Les règles des signes pour la multiplication s'établissent encore aisément sans que l'on ait à parler de quantités négatives isolées, lesquelles n'ont encore pour nous aucun sens. — Ainsi, soient à multiplier les deux polynômes

$a-b+c$ et $m-n$. — Si nous avions seulement à multiplier $a-b+c$ par m, pour obtenir le produit, il nous faudrait faire le produit ma de a par m, en extraire le produit bm de b par m, ajouter à la différence le produit de c par m, et ainsi de suite, ce qui nous donnerait

$$am - bm + cm \ldots$$

Mais nous avions à multiplier $a-b+c$ non pas seulement par m, mais par $m-n$. Le produit que nous avons trouvé est donc trop fort de n fois $a-b+c$: car chaque terme de ce polynôme a été multiplié par un nombre n fois trop fort. — Pour avoir le véritable produit, il faut donc du produit que nous venons de trouver, retrancher celui-ci

$$an - bn + cn \ldots$$

ce qui donne

$$am - bm + cm - an + bn - cn .$$

Si nous comparons ce produit avec les deux facteurs, nous voyons que deux termes additifs dans les deux facteurs donnent un produit partiel additif dans le produit total, que deux termes soustractifs donnent aussi un produit partiel additif, mais que deux termes l'un additif, l'autre soustractif, donnent un produit partiel soustractif. — on en conclut cette règle, qui n'est autre chose que ce que nous venons de dire : deux termes de même signe donnent un produit positif ; deux termes de signes contraires donnent un produit négatif. — Dans ce qui précède, on n'a évidemment pas un mot à dire de quantités négatives isolées.

Division. — Il semble au premier abord que dans la division il soit nécessaire de parler de quantités négatives isolées. ainsi, supposons que dans le dividende, le terme

plus élevé en x, x étant la lettre par rapport à laquelle on a ordonné, soit négatif, et le terme le plus élevé en x dans le diviseur, positif. — Le terme le plus élevé en x dans le dividende étant le produit, sans réduction, du terme le plus élevé en x dans le diviseur par le terme le plus élevé en x dans le quotient, ce dernier s'obtiendra en valeur et en signe en divisant le terme le plus élevé en x dans le dividende par le terme le plus élevé en x dans le diviseur, tous deux pris avec leurs signes, — c.à-d. en divisant une quantité négative par une positive. — Mais on voit qu'il n'y a ici aucune difficulté, et que le signe du terme considéré du quotient se trouve défini tout naturellement par la règle de la multiplication : Le produit de ce terme par un terme positif doit reproduire un terme négatif : donc le signe de ce terme doit être —.

On arrive ainsi, sans parler de quantités négatives, à conclure que, dans une division, le quotient de deux termes de mêmes signes est positif, et que le quotient de deux termes de signes contraires est négatif.

Voyons maintenant comment s'introduit l'idée de Quantités négatives, c.à.d. de quantités absolues précédées du signe — et isolées. Ces quantités, comme nous l'avons dit, n'ont aucun sens par elles-mêmes, et ne s'introduisent que comme des symboles commodes, et dans un but de généralisation.

Il arrive très souvent que des problèmes, même très simples, comportent plusieurs cas, qui se mettent différemt en éq. — Il faut alors considérer successivemt ces différents

cas, sans quoi, croyant avoir Raisonné Généralement, on pourrait ne pas obtenir le Résultat que l'on cherche. — Prenons un Exemple.

Problème. — Deux personnes ont des ages a et b. on demande à quelle Epoque la personne la plus agée a le double de l'age de l'autre? — on suppose $a > b$.

Il est Evident à priori que deux cas sont possibles : où l'Epoque demandée est passée, ou bien elle n'est pas encore arrivée. considérons successivement ces deux cas.

Supposons d'abord que l'Epoque demandée ne soit pas encore arrivée. — Soit x le nombre d'années qui doivent s'Ecouler entre le moment présent et cette Epoque. on aura

$$a+x = 2(b+x)$$

$$x = a-2b$$

Si l'on suppose $a>2b$, la soustraction est possible, et le Résultat donne la valeur cherchée pour x. — Mais si cette soustraction ne peut s'effectuer, l'impossibilité à laquelle nous arrivons nous indique que la supposition d'où nous sommes partis est absurde : et que par conséquent l'Epoque demandée n'est pas dans l'avenir. — cherchons-la dans le passé.

Soit donc x le nombre d'années Ecoulées depuis cette Epoque. — On a

$$a-x = 2(b-x)$$

$$x = 2b-a$$

Comme, par hypothèse, $2b>a$, la soustraction est possible, et le Résultat nous donne pour x la valeur cherchée.

Nous voyons donc que, si l'on a $a>2b$, l'Epoque cherchée est dans l'avenir et est donnée par

la formule ~~$x = 2b + a$~~ $x = a - 2b$. Si $a < 2b$, elle est dans le passé et donnée par la formule $x = 2b - a$. — Or Remarquons que, dans ces deux cas, la valeur de l'inconnue est donnée par la différence de a et de $2b$, faite dans le sens où elle est possible. — Et si nous supposons par exemple l'Époque dans le passé, et donnée par $x = 2b - a$, la soustraction impossible $a - 2b$ à laquelle on est conduit quand on suppose que l'Époque est dans l'avenir ne devient possible que quand on ajoute à a au moins $2b - a$, c.à.d. précisément la valeur de x qui convient à la question. — Il résulte de là que si, ayant traité la question dans la fausse hypothèse que l'Époque est dans l'avenir, et ayant trouvé le résultat $a - 2b$, on veut obtenir la véritable solution de la question, il faut prendre pour x le plus petit nombre qui, ajouté à a, rend la soustraction $a - 2b$ possible, ce que l'on exprime en disant que l'on prend $a - 2b$ avec un signe contraire.

On peut alors représenter la solution du problème dans les deux cas par la formule $x = a - 2b$, en faisant la convention indiquée ci-dessus. — Ce qu'on exprime plus simplement en disant que, si x est positif, l'Époque demandée est bien dans l'avenir, et donnée par la valeur de x, et que, si x est négatif, l'Époque est dans le passé; et donnée par la valeur absolue de x.

Remarquons que, lorsqu'en résolvant une Eq. on arrive à une valeur de l'inconnue donnée par une soustraction impossible à effectuer, ce qu'on appelle une valeur négative, cette valeur, qui n'a pas de sens par elle-même, mise dans l'Eq. à la place de x, et traitée au moyen des règles des signes établies précédemment, vérifie l'Eq.

c'est en ce sens qu'une quantité négative obtenue pour valeur de x est dite une Solution ou une Racine Négative de l'Eq.

L'Utilité des Quantités négatives comme moyen de généralisation se montre mieux encore dans la Résolution Générale des Eq. du premier degré à plusieurs Inconnues.

Supposons le cas de deux Eq. à deux inconnues :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \right.$$

d'où l'on tire les valeurs

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

Ces formules conviennent toutes les fois que les coefficients de x et de y ont les signes que nous leur avons supposés dans les Eq. (1). — Si les signes devenaient autres, les formules changeraient. — ainsi, si l'on donnait les Eq.

$$\left\{ \begin{array}{l} ax - by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \right.$$

on aurait

$$x = \frac{cb' + bc'}{ab' + ba'} \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' + ba'}$$

Si, au lieu de deux Eq. on en avait trois, quatre..., le nombre des formules qu'il faudrait établir dans les diverses hypothèses que l'on pourrait faire sur les signes des coefficients, finirait par devenir immense. — Il en serait de même à fortiori si l'on voulait combiner les formules d'un problème présentant ainsi plusieurs cas avec les formules fournies par une autre question multiple aussi. — Il y avait donc ici nécessité de chercher à généraliser les Résultats, et à les réduire tous au plus petit nombre possible

de formules.

Or, dans le cas qui nous occupe, remarquons que les Eq. (1) ne diffèrent des Eq. (2) que par ce que le terme by, additif dans celles-ci, est soustractif dans celles-là. Imaginons que, dans les formules déduites des Eq. (1), à la place de b on mette $(-b)$, bien que cette substitution n'ait aucun sens par elle-même; si nous appliquons les règles des signes démontrées précédemment pour le cas où les opérations ont un sens réel, nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{cb' - (-b)c'}{ab' - (-b)a'} = \frac{cb' + bc'}{ab' + ba'} \\ y &= \frac{ac' - ca'}{ab' - (-b)a'} = \frac{ac' - ca'}{ab' + ba'} \end{aligned}\right.$$

et nous voyons que les expressions ainsi obtenues ne sont autres que les valeurs de x et de y convenant aux Eq. (2). Donc nous pouvons dire que les formules relatives au cas des Eq. (1) donnent les formules relatives au cas des Eq. (2) quand on change dans ces formules b en $(-b)$ et qu'on simplifie au moyen des règles ordinaires des signes. — On verrait de même que, quels que soient les signes qu'on suppose aux termes d'un système d'Eq. du premier degré à deux inconnues, les valeurs des inconnues sont données par les formules relatives à un de ces cas possibles, par ex. au cas des Eq. (1), quand on fait dans ces formules les changements de signes par lesquels le système des Eq. considérées diffère du système pris pour type, et qu'on applique les règles des signes que nous avons données.

Les mêmes conventions et les mêmes résultats s'appliquent de même, comme il est facile de le voir, non seulement

à un système d'Eq. à un nombre qcq. d'inconnues, mais encore à tout système de formules susceptibles de se déduire les unes des autres par le changement de signe de certains facteurs.

Une autre généralisation importante qu'on opère au moyen des quantités négatives, est celle qui donne naissance aux exposants négatifs. — on sait comment une généralisation analogue à la généralisation de la notion de nombre qui d'abord, restreinte aux nombres entiers, embrasse bientôt les nombres fractionnaires et les incommensurables, a donné naissance aux exposants fractionnaires et incommensurables. — C'est de la même manière qu'on est conduit aux exposants négatifs. — Supposons qu'on ait à faire la division $\frac{a^m}{a^n}$: en supposant $m > n$, le résultat est a^{m-n}. Or imaginons que, dans un calcul, on ait une pareille division à faire. Si l'on sait que $m > n$, la réduction que nous venons d'indiquer peut s'opérer. Mais si l'on ignore à priori quels sont les rapports de grandeur de m et de n, on est privé de l'avantage de cette réduction. — Proposons-nous donc de chercher quelles sont les conventions à faire pour que, quels que soient m et n, on puisse écrire

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

en d'autres termes, pour que l'expression $\frac{1}{a^{n-m}}$ à laquelle se réduit $\frac{a^m}{a^n}$ quand $m < n$, puisse être regardée comme représentée par a^{m-n}, $m-n$ étant négatif. — Or, si l'on introduit dans un calcul cette quantité, a^{m-n}, ou, en posant $n-m = p$, a^{-p}, en appliquant à cette quantité qui, par elle-même, n'a aucun sens, les ré-

-gles démontrées pour les exposants ordinaires, en appliquant en même temps les règles ordinaires des signes, on arrive toujours à des résultats symboliques tels que, si on les transforme dans les notations ordinaires, on obtient précisément les mêmes résultats que si l'on était parti des mêmes expressions, mais écrites au moyen des notations ordinaires, et qu'on leur eût fait subir les mêmes opérations. — Cette vérification démontre donc que la fraction $\frac{a^m}{a^n}$ peut toujours s'écrire a^{m-n}, quels que soient m et n, à la condition d'appliquer à ces exponentielles de nouvelle forme les règles relatives aux expon. ordinaires, avec les règles ordinaires des signes.
Les opérations auxquelles on est conduit de la sorte ne signifient rien par elles-mêmes, et il faut bien se garder de vouloir les interpréter. On les applique comme des procédés mécaniques qui doivent conduire aux véritables résultats.

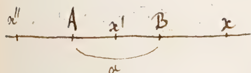
Ce qui précède montre bien quel est l'esprit de généralisation de l'algèbre, et comment cette généralisation s'effectue surtout au moyen des quantités négatives. — Le but qu'on se propose dans un cas particulier étant nettement défini, la convention qui doit convenir à ce but est nettemt. définie elle-même, et non arbitraire ; seulement il faut observer que, lorsqu'on admet un procédé de généralisation, ce procédé doit être d'accord avec ceux qu'on a déjà établis, afin que, quand les formules généralisées par ces différents procédés, se trouveront combinées dans un calcul, il n'en résulte aucune contradiction.

Prenons encore qq. exemples qui mettent en évidence

l'utilité de ces Généralisations au moyen des quantités négatives.

Problème des Courriers. — Deux Mobiles parcourent une droite d'un mouvement uniforme. — on demande leur point de rencontre.

avant de nous occuper de la position relative des mobiles, occupons-nous de fixer la position d'un mobile sur la droite qu'il parcourt. — Supposons d'abord que le mobile se meuve de gauche à droite. Soit B la position du mobile à l'Epoque présente où $t=0$. Rapportons la position du mobile à une origine A qcq. prise sur la droite qu'il parcourt. Il y a trois Régions distinctes où le point mobile peut se trouver à un instant donné, soit dans le passé, soit dans l'avenir. Il peut être à droite de B, ou entre A et B, ou à gauche de A, en supposant A lui-même à gauche de B. — Etudions successivement toutes ces positions. —



Supposons d'abord le mobile en x, à droite de B. ce n'est que dans l'avenir qu'il occupera cette position, et si nous désignons par x la distance Bx, par a la distance AB, par v l'espace parcouru dans l'unité de temps, ou la vitesse, enfin par t le nombre d'unités de temps qui doivent s'écouler pour que le mobile arrive en x, on aura

$$Ax = AB + Bx$$

ou

$$x = a + vt \qquad (1)$$

Voyons maintenant la position du mobile dans le passé. Et d'abord, supposons-le entre A et B en x'.

Si nous désignons $x'B$ par x, et par t' le nombre d'unités de temps écoulées depuis que le mobile était en x', nous aurons

$$x = Ax' = AB - x'B$$

ou

$$x = a - vt' \qquad (2)$$

Comparant cette Eq. avec l'Eq. obtenue dans le premier cas, nous voyons qu'elles diffèrent par le signe du dernier terme. – or n'y aurait-il pas moyen d'établir qq. convention qui permît de la déduire de l'Eq. du premier cas ? t désignant le nombre d'unités de temps qui séparent le moment où l'on considère le mobile de l'instant où il se trouve en B, convenons de désigner par t ce temps compté dans l'avenir, et par $-t$ ce temps compté dans le passé, bien que cette dernière expression n'ait aucun sens par elle-même, et mettons cette expression $-t$ au lieu de t dans l'Eq. (1), en appliquant la règle des signes pour la multiplication : nous retombons sur l'Eq. (2). – on voit donc que, moyennant cette convention, qui n'a de sens que parce qu'elle donne le résultat cherché, nous pouvons dire que l'Eq. (1) détermine la position du mobile, qu'il soit situé à droite de B ou entre A et B.

Passons au cas où le mobile est à gauche de A, en x''. t'' désignant le nombre d'unités de temps écoulées depuis que le mobile était en x'' jusqu'au moment où il est en B, et Ax'' étant représenté par x, on a

$$x = vt'' - a \qquad (3)$$

et si nous comparons cette Eq. aux Eq. (1) et (2),

nous voyons que les termes sont encore les mêmes aux signes près. — or l'Eq. (3) peut s'écrire

$$-x = a - vt''$$

si l'on convient que cette manière d'écrire, qui, par elle-même, ne signifie rien, ne représente pas autre chose que l'égalité de x et de $vt'' - a$. or, prenons l'Eq. (1), et appliquons la convention faite précédemment au sujet de t; convenons en outre que si les unités de longueur, au lieu d'être comptées à droite de l'origine, sont comptées à gauche; au lieu de les représenter par x, on les représentera par $-x$, en appliquant à cette quantité négative et dépourvue de signification par elle-même, les règles ordinaires des signes, nous retombons précisément sur l'Eq. (3).

Donc, moyennant ces conventions, ainsi justifiées, nous pouvons dire que l'Eq. (1) convient aux trois cas que peut présenter la position du mobile.

Ce que nous disons ici n'a évidemment rien d'absolu, et l'on peut dire si l'on veut que, suivant que le mobile est à droite de B, ou entre A et B, ou à gauche de A, sa position sera donnée par l'Eq. (1), ou par (2), ou par (3). Mais il est évident que si nous voulons réduire la question au plus petit nombre de formules possible, il sera préférable de n'adopter qu'une seule de ces Eq. en adoptant les conventions précédentes en vertu desquelles (2) et (3) se déduisent de (1).

Nous avons supposé jusqu'ici que A était à gauche du point B où le mobile se trouve à l'époque actuelle. — Supposons que A ait été placé à droite de B.

alors, en désignant toujours par a la distance AB, et considérant une position x du mobile dans l'avenir, on arrivera à l'Eq.

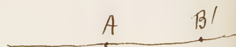
$$x = vt - a \qquad (4)$$

et, par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent, on verra que, moyennant les mêmes conventions, cette Eq. pourra être considérée comme représentant toutes les positions du mobile dans le passé comme dans l'avenir. — or cette Eq. n'est pas la même que celle que nous avons trouvée dans le cas où A est à gauche de B. — Mais il est évident que si nous faisons pour la distance <u>a</u> la même convention que pour la distance x, savoir que, suivant qu'elle sera comptée à droite ou à gauche de A', elle sera représentée par a ou par −a, l'Eq. (1) devient

$$x = vt + (-a) = vt - a$$

en vertu des règles des signes démontrées précédemment, et que par suite l'Eq. (1) peut être regardée comme donnant au moyen de ces conventions l'Eq. (4). — Donc l'Eq. (1) nous donnera toutes les positions du mobile quelle que soit la position de A par rapport à B.

Nous avons admis, dans tout ce qui précède, que le mobile se mouvait de gauche à droite. — or il peut arriver que ce mobile se meuve de droite à gauche. Soit dans ce cas A l'origine, B' le lieu où se trouve le mobile à l'Epoque actuelle $t = 0$. En considérant le cas où le mobile se trouve en un point situé entre A et B', désignons par x sa distance au point A, et



par v' sa vitesse, qui est dirigée de droite à gauche: nous aurons

$$x = a - v't \qquad (5.)$$

et l'on fera voir aisément que, moyennant les conventions faites précédemment, cette éq. convient à toutes les positions du mobile et de l'origine. — or cette éq. ne diffère que par les signes de l'éq. (4). — Si nous convenons que la vitesse, suivant qu'elle sera comptée de gauche à droite, ou de droite à gauche, sera représentée par v ou par $-v$, il est aisé de voir qu'en faisant cette substitution dans (1), et appliquant les règles ordinaires des signes, cette éq. devient

$$x = a + (-vt) = a - vt$$

et nous retombons sur l'éq. (5). — donc, en vertu de cette convention, justifiée par le résultat, nous pouvons dire que l'éq. (1) représente toutes les positions du mobile, quelle que soit la position de l'origine, et quelle que soit la direction du mouvement.

Ces préliminaires étant posés, si l'on demande de trouver le point où se rencontrent les deux mobiles, qui se meuvent uniformément sur une droite, quelle que soit d'ailleurs la position de l'origine pour chacun d'eux, et quelles que soient les directions de leur mouvement, nous pourrons, en faisant les conventions indiquées précédemment, représenter les positions des mobiles à un instant quelconque par les éq.

$$x = a + vt\ , \quad x' = a' + v't$$

L'instant où les mobiles se rencontrent sera donc

$$t = \frac{a - a'}{v - v'}\ ,$$

et le point de rencontre sera donné par

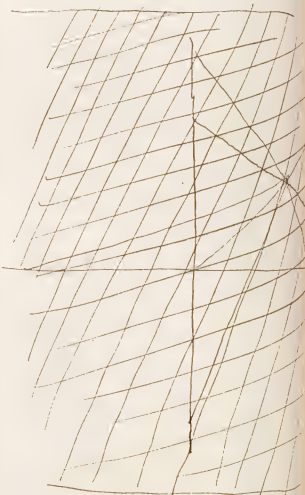
$$x = a + v \frac{\alpha - \alpha'}{v - v'}$$

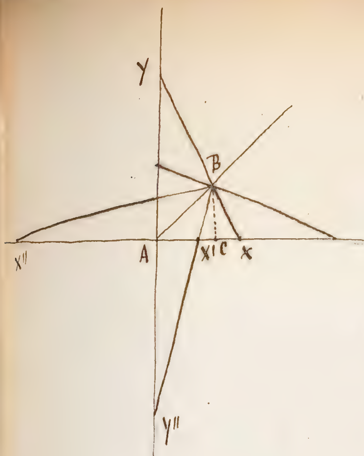
Si ces formules nous conduisent à des valeurs soit positives, soit négatives, de t et de x, ces valeurs auront pour nous un sens parfaitement net, en vertu des conventions que nous avons faites : car nous savons ce que l'on doit entendre quand on dit que x ou t sont positives ou négatives.

La solution du problème proposé se trouve donc réduite à une seule formule, en vertu de ces conventions, tandis que, si l'on avait examiné séparément tous les cas possibles, on aurait été conduit à un grand nombre de formules différentes.

Problème. – Mener par un point pris sur la bissectrice d'un angle droit une droite telle que la partie interceptée par les deux côtés de l'angle droit ait une longueur donnée m.

Il est aisé de voir à priori que le problème comporte quatre solutions différentes, pourvu que la droite donnée m soit plus grande qu'une certaine limite. – En effet, il est évident que nous avons une droite répondant à la question et située dans l'angle YAX : et que, si nous en avons une, nous en aurons une seconde symétrique de la première par rapport à la bissectrice AB. D'ailleurs nous avons deux autres droites symétriques aussi par rapport à AB et telles que la longueur m soit interceptée ~~par~~ sur l'une par l'angle YAX'', sur l'autre, par l'angle $Y''AX$. – De plus il est aisé de voir que, de ces quatre droites répondant à la question, trois rencontrent AX à droite de A, et la quatrième à gauche,





et que, sur celles qui rencontrent AX à droite de A, deux rencontrent AX à droite du pied C de la perp. abaissée de B sur AX, et la 3e. entre A et C.

Considérons d'abord une des droites qui rencontrent AX à droite de C ; X étant le point de rencontre, posons AX = x : on voit aisément que nous aurons

$$x : m :: x - a : \sqrt{a^2 + (x-a)^2}$$

d'où

$$m^2 (x-a)^2 = a^2 x^2 + x^2 (x-a)^2 \qquad (1)$$

et cette Eq. convient à toutes les droites répondant à la question, et rencontrant AX à droite de C.

Considérons ensuite la droite qui rencontre AX entre A et C. Nous aurons, en désignant AX' par x,

$$x : m :: a - x : \sqrt{a^2 + (a-x)^2}$$

d'où

$$m^2 (x-a)^2 = a^2 x^2 + x^2 (a-x)^2$$

Comme $(x-a)^2 = (a-x)^2$, on voit que cette Eq. est identique avec la première.

Considérons la 4e. solution. — Nous aurons, en désignant AX'' par x

$$x : m :: a + x : \sqrt{a^2 + (a+x)^2}$$

d'où

$$m^2 (a+x)^2 = a^2 x^2 + x^2 (a+x)^2$$

Cette Eq. n'est pas la même que celle qui convient aux cas précédents. — Mais remarquons que cette dernière Eq. a une seule racine positive, et la première trois racines positives et une négative, en entendant par racine négative ce que nous avons expliqué précédemment. — Et si nous appelons α la racine positive, et par conséquent la seule admissible, de cette dernière Eq., — α substitué

à x dans l'Eq. (1) devra la vérifier, ainsi qu'il est évident d'après la forme de ces Eq. – Donc -2 est la Racine négative de l'Eq. (1).

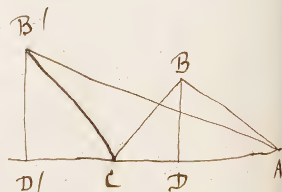
Ainsi nous pouvons dire que la première Eq. donne les 4 Solutions de la question, si l'on Remarque que la solution Répondant à la Racine négative s'obtient en prenant la valeur absolue de cette Racine, et en portant la longueur qu'elle Représente en sens Inverse du sens dans lequel on a porté les longueurs correspondantes aux Racines positives.

C'est dans le même But de Généralisation et avec le même sens que les Quantités négatives s'Introduisent dans les formules Trigonométriques, et dans celles de la Géométrie analytique.

On sait qu'en Trigonométrie, ce ne sont pas les angles eux-mêmes qu'on fait entrer dans les Calculs, mais des Rapports de lignes Intimement liés aux angles. – On sait ce qu'on appelle Sinus, cosinus, ... etc. Or on est conduit comme précédemment à Regarder comme positives ou comme négatives les lignes Trigonométriques, suivant qu'elles sont comptées dans un sens ou dans l'autre.

Prenons des Exemples.

Supposons que l'on se propose d'Établir la formule Trigonométrique qui lie les trois côtés a, b, c d'un Triangle avec l'angle compris entre les côtés a et b. – Soit ABC le Triangle, et Supposons d'abord l'angle C aigu. Si l'on abaisse BD perp. sur AC, la Géométrie donne



$$c^2 = b^2 + a^2 - 2b.CD$$

D'ailleurs, dans le Triangle BCD, on a

$$CD = a \cos C$$

d'où

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$$

Supposons l'angle C obtus, et soit B'CA le nouveau triangle. Désignons B'CD' par A'. on a

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2b \cdot CD'$$

$$CD' = a \cos A'$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos A'$$

Cette formule n'est pas la même que la première ; mais, si nous convenons de représenter le cosinus de l'angle A par Cos A, et le cosinus de son supplément par − Cos A, ce qui revient à affecter du signe −, les longueurs comptées à gauche de C, les longueurs comptées à droite de C étant représentées par leurs valeurs absolues, et si nous appliquons les règles des signes, les deux formules que nous avons trouvées pour les deux cas se réduisent à une seule, qui est

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A.$$

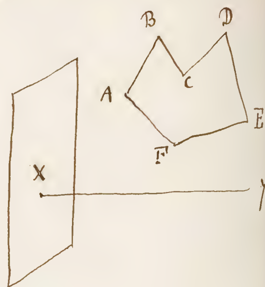
et remarquons que ce moyen de généraliser, qui consiste à représenter un cosinus par Cos A ou − Cos A, suivant que l'angle est aigu ou obtus, c.à.d. suivant qu'il est compté à droite ou à gauche de C, n'est pas arbitraire : c'est l'unique moyen qui se présente à nous pour généraliser les formules précédentes.

Il existe un théorème qui peut servir à démontrer presque complètement la généralité des formules trigonométriques au point de vue des signes. — C'est le théorème des projections, dont voici l'énoncé.

Étant donné un polygone fermé, plan ou gauche ; si, parcourant le périmètre de ce polygone dans un sens déterminé à partir d'un sommet qcq. on multiplie chaque

côté par le cosinus de l'angle que fait sa direction avec une direction fixe, quand on sera revenu au point de départ, la somme de ces produits sera identiquement nulle.

(on convient de regarder, comme nous l'avons fait ci-dessus, les cos. des angles aigus comme positifs, et les cos. des angles obtus comme négatifs).



Pour démontrer ce théorème, XY étant la direction fixe donnée, et ABCDEFA étant le polygone, imaginons un plan perp. à XY, et qui laisse le polygone donné tout entier d'un même côté. – Il est aisé de voir que, toutes les fois que je parcourrai un côté faisant un angle aigu avec la direction XY, je m'éloignerai du plan; que, toutes les fois que je parcourrai un côté faisant un angle obtus avec XY, je m'en approcherai. Or la quantité dont je m'éloigne en parcourant un côté qui fait un angle aigu, est égale au produit du côté par le cosinus de l'angle que sa direction fait avec la direction XY. – La quantité dont je me rapproche en parcourant un côté qui fait un angle obtus avec XY est égale au produit du côté par le cos. du supplément de l'angle que fait sa direction avec la direction XY: et comme, lorsque je suis revenu au point de départ, la somme des quantités dont je me suis rapproché est nulle, j'aurai, en désignant par a, b, c, ... les côtés du polygone, par A, B, C .. les angles de leurs directions respectives avec la direction XY, j'aurai, et par A', B', C' ... les suppléments de ces angles, j'aurai une expression de la forme

$$a \cos A + b \cos B - c \cos C' + \dots = 0$$

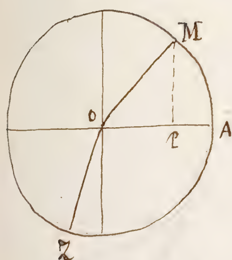
Si donc je représente par $-\cos C$ le cosinus de l'angle

supplémentaire C', et ainsi des autres, j'aurai, en substituant et appliquant les règles des signes,

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C + \cdots = 0$$

ce que nous nous proposions de démontrer.

Appliquons cette formule à la détermination de celle qui donne le cosinus de la somme de deux arcs.



Soit AM = a. – Prenons AZ = b, et abaissons de M une perp. MP sur OA. – Projetons le triangle MOP sur OZ en appliquant le théorème précédent. Remarquons que OP = cos a, MP = sin a (et OM = 1). Donc en suivant le contour dans le sens OPMO, on a

$$\cos a \cos b + \sin a \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) - \cos(a+b) = 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Cette formule a été établie dans le cas où M est dans le premier quadrant. Si nous supposons M situé dans un autre quadrant, le sens de OP & et de MP changerait, et par suite la formule résultant de l'application du théorème des projections changerait aussi. – Or il est facile de voir que, si l'on veut que cette formule ne change pas, il faut admettre précisément les conventions sur les quantités négatives déjà énoncées. – En effet supposons une figure dans laquelle MP par ex. soit de sens contraire à celui qu'il a dans notre figure: d'après le théorème des projections, chaque côté doit être pris en valeur absolue, et, comme on suppose que la direction change de signe, on voit que le produit du côté MP par le cosinus de l'angle de MP avec OZ aura aussi changé de signe. – Pour que le signe de ce terme redevienne le même, il faut que MP,

que nous avons supposé jusqu'ici pris en valeur absolue, soit considéré dans ce second cas comme négatif. Nous sommes donc conduits à regarder le sinus comme négatif quand il est compté en sens inverse de la direction dans laquelle il était compté dans le cas pour lequel la formule a été établie.

Par des raisons semblables, si le cosinus OP venait à changer de direction dans une certaine disposition de la figure, on verrait qu'en considérant alors MP comme négatif, moyennant la règle des signes, la formule relative à ce cas se ramènerait à la formule relative au premier cas. — Cette formule peut donc, moyennant ces conventions, être considérée comme générale.

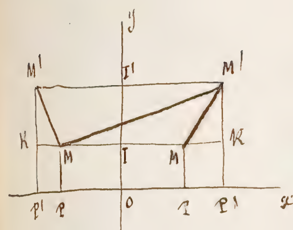
On aurait trouvé d'une manière analogue la formule relative au cos. de la différence de deux arcs, en portant l'arc $Az = b$. non plus en sens inverse de a, mais dans le même sens, et en appliquant le th. des projections. — on démontrerait de même la généralité des formules.

Les formules relatives au cos. de la somme ou de la différence de deux arcs étant démontrées pour des arcs quelconques, on en déduit les formules relatives aux sinus, en appliquant la formule des cos. aux arcs $\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ et b. Car on a évidemt.

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right)=\sin(a+b)\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-a+b\right)=\sin(a-b)\end{array}\right.$$

Passons aux formules de la Géométrie analytique, et d'abord, aux formules relatives à des coordonnées rectilignes. — On sait que, dans ce système, la position

d'un point se détermine par les distances de ce point à deux axes fixes, pourvu qu'on ajoute la connaissance de celui des quatre angles des axes dans lequel il est situé. — Nous allons voir comment ces positions différentes du point dans les différents angles s'expriment commodément par les changements de signes des distances aux axes, changements qui, en eux-mêmes, n'ont aucun sens, mais qui deviennent d'une très-grande utilité quand on a bien défini la convention qui les introduit.



Cherchons l'expression de la distance de deux points, en supposant, pour plus de simplicité, les axes rectangulaires. Soient M et M' les deux points. — Il est aisé de voir que ces deux points peuvent être placés, l'un relativement à l'autre, d'un grand nombre de manières. Ils peuvent être ou tous deux à droite de l'axe des y, ou tous deux à gauche, ou l'un à droite et l'autre à gauche : et, dans chacune de ces positions, M peut être à droite ou à gauche de M'. De plus, dans chacun de ces cas, les points peuvent occuper des positions tout-à-fait semblables l'un par rapport à l'autre et par rapport à l'axe des x.

Dans chacune de ces positions, on voit que la distance des deux points est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dans lequel les côtés sont respectivement les différences des distances des deux points aux axes des coordonnées, pourvu toutefois que les deux points soient dans le même angle des axes. — Dans ce cas nous avons

$$\delta^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$$

Dans tous les cas que l'on peut considérer, on a une formule analogue à celle-ci, c.à.d. dont le second

membre se compose de deux carrés. — La discussion des positions des deux points relativement à l'axe des y revient donc à la discussion des différentes valeurs du terme $(x'-x)^2$: pour l'axe des x, ce seront les valeurs du second terme qu'il faudra discuter.

Nous supposerons toujours que M' est le plus éloigné de l'axe des x.

Or, d'abord, si au lieu de supposer M à gauche de M', nous supposons M à la droite de M', les deux points restant dans l'angle YAX, on aura

$$\delta^2 = (x-x')^2 + (y'-y)^2$$

Mais il est évident que, d'après les règles des signes, $(x-x')^2$ et $(x'-x)^2$ représentent toujours la même quantité. Par conséquent, dans la dernière formule, nous pouvons mettre $x'-x$ à la place de $x-x'$: ce qui montre que la formule

$$\delta^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$$

convient égalem.t à toutes les positions possibles de M et de M' relativement à l'axe des y.

Supposons en second lieu le point M à gauche de l'axe des y, M' restant à droite. alors $\overline{MK}^2 = (x'+MI)^2$ et si je désignais MI par x, il est évident que j'aurais une autre formule que précédemment. Mais si j'appelle x le nombre d'unités contenues dans MI, prises avec le signe $-$, $x'+MI$ deviendra $x'-x$, et par conséquent la valeur de δ sera encore donnée dans ce cas par la première formule.

On verrait aisément qu'il en est encore de même si, au lieu de supposer que M' reste à droite de l'axe

des y, quand M passe à gauche, on suppose que c'est l'inverse qui a lieu.

Supposons maintenant les deux points situés à gauche de l'axe des y, et M' par ex. plus éloigné de cet axe que M. Nous aurons dans ce cas

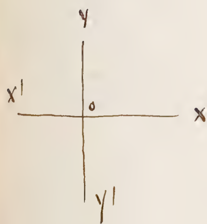
$$\overline{MK}^2 = (M'I - MI)^2$$

et si nous désignons M'I par x' et MI par x, la formule se réduira à la formule primitive. Mais en agissant ainsi, nous manquerons à la convention que nous avons faite d'appeler x le nombre d'unités de longueur qui représente l'abscisse, pris avec le signe − quand cette distance est portée à gauche de l'axe des y.

Or il est aisé de voir que, moyennant cette convention, et en étendant les règles des signes aux quantités négatives isolées, $\overline{MK}^2$ sera encore représenté par $(x'-x)^2$.

On verrait de même que cette formule convient encore quand, les deux points étant à gauche de l'axe des y, le point M en est plus éloigné que M'.

La formule $\delta^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$ est donc tout-à-fait générale quand on fait la convention qui consiste à regarder



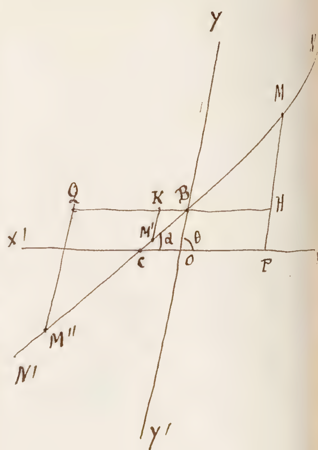
x et y comme positifs dans l'angle YOX
———— négatifs ———— Y'OX'
x comme positif et y comme négatif dans l'angle Y'OX
———— négatif ———— positif ———— YOX'

De la même manière on verrait que, si l'on cherche l'Eq. d'une courbe qcq., et si l'on ne fait aucune convention, on aura généralement quatre Eq. différentes convenant respectivement aux quatre parties de

la courbe situées dans les 4 angles des axes. - Moyennant les conventions faites ci-dessus, ces quatre Eq. se réduiront à une seule. - Exemple : le Cercle.

Prenons encore l'exemple de la Ligne droite. Supposons la Ligne droite déterminée par son ordonnée à l'origine et par l'angle qu'elle fait avec l'axe des x.

Il y a trois Régions dans lesquelles la droite a des points : l'angle YAX, l'angle YAX' et l'angle $Y'AX'$. Si nous considérons d'abord un point qcq. de la droite dans l'angle YAX, nous aurons



$$y = AB + MH$$

$$y = b + \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}\, x = b + ax$$

en posant $a = \dfrac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}$

Pour un point situé dans l'angle YAX', on aura

$$y = b - BK . \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)} = b - a . BK$$

Si je veux que cette Eq. se réduise à la première, il faudra poser $-BK = x$, et étendre les Règles des Signes aux quantités négatives isolées. - alors on aura, pour le second cas comme pour le premier,

$$y = b + ax .$$

Pour un point situé sur CN', on a

$$M''R = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)} . QB - b$$

ou bien

$$-M''R = -a . QB + b$$

et alors on voit qu'en posant $-M''R = y$ et $-QB = x$, on a encore dans ce cas

$$y = b + ax .$$

Donc, si l'on fait les conventions énoncées précédemment, une droite se trouve représentée dans toute son étendue par une seule Eq.

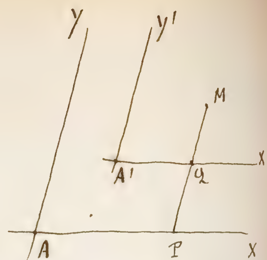
Nous avons supposé dans notre figure que le point d'intersection de la droite avec l'axe des y était situé au-dessus de l'axe des x. On verrait aisément que l'Eq. convient également au cas où il est situé au-dessous, pourvu que l'on fasse, relativement au signe de b, la même convention que pour les y.

Enfin l'angle α, que nous avons supposé aigu, pourra être qcq. sans que l'Eq. change, en faisant les conventions déjà établies pour les signes des lignes trigonom.

Cette discussion que nous venons de faire est nécessaire quand on cherche un lieu qcq. car il n'est pas évident à priori que, si l'on prend un point du lieu au hasard, l'Eq. établie pour ce point, qui est nécessairemt. dans une position particulière par rapport aux axes, conviendra à tous les autres ~~axes~~ points.

Transformation des Coordonnées. — Il est souvent utile de changer les axes des coordonnées. Les règles établies précédemment pour la généralisation au moyen des quantités négatives permettent de réduire les formules de transformation à un seul type, quelle que soit la disposition des nouveaux axes et des anciens.

La transformation peut se faire de deux manières : ou bien on change seulement l'origine en conservant aux axes leurs directions, ou bien l'on change les directions des axes.

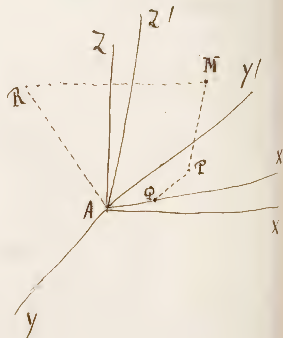


Si l'on change seulement l'origine, soit M un point qcq. situé à la fois à droite de l'ancien axe des y et du nouvel axe des y, et au dessus des deux axes des x. Soient α, β les coordonnées de la nouvelle origine par rapport aux anciens axes ; x', y', et x et y les coord. de M par rapport aux nouveaux et aux anciens axes. on a évidemment.

$$x = \alpha + x' \qquad y = \beta + y'$$

Pour généraliser ces formules, il faut faire voir que, quand on place le point M dans une autre position, ces formules restent les mêmes, en vertu des conventions que nous avons faites sur les signes des directions. Cette discussion devra également être faite, en pla-.cant la nouvelle origine successivement dans chacun des 4 angles des anciens axes. Elle se fera exactement comme celle qui est relative à la distance de deux points.

Supposons maintenant qu'on change la direction des axes, et, pour plus de généralité, considérons trois axes dans l'espace.



Soient Ax, Ay, Az les anciens axes ; Ax', Ay', Az' les nouveaux. Considérons un point M dans l'angle des coordonnées positives relativement aux nou-.veaux axes. Je mène les nouvelles coordonnées MP, PQ, QA de ce point. Soit MR perp. sur le plan ZAY : MR est l'x du point M par rapport aux anciens axes. — Projetons le polygone AQPMRA sur l'axe des x, et supposons pour plus de sim-.plicité, les deux systèmes d'axes rectangulaires. — On a

$$x' \cos(x\,x') + y' \cos(y'x) + z' \cos(z'x) + x \cos(x, -x) = 0$$

d'où
$$x = x' \cos(x'x) + y' \cos(y'x) + z' \cos(z'x)$$
on trouverait deux formules analogues pour y et z.

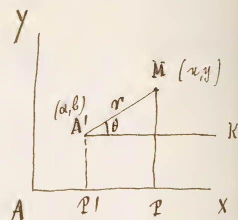
Ces formules, établies pour une position particulière de M, conviennent à toutes les positions de M, en vertu des conventions établies sur les signes.

En effet, supposons que l'une des coordonnées de M, PQ par ex. vienne à changer de signe. Dans l'application du th. des projections, les côtés sont pris en valeur absolue, et par conséquent PQ conserve la même valeur que précédemment. Mais le cosinus par lequel PQ est multiplié dans la formule, change de signe. Le terme PQ cos $(y'x)$ se changera donc en $-$ PQ cos$(y'x)$, et par conséquent, le seul moyen de faire que cette formule soit donnée par la première, c'est d'appeler y', non pas PQ, mais $-$ PQ. Le terme considéré redevient alors $y' \cos(y'x)$.

De même, si MR se trouvait, dans une position particulière de la figure, dirigé en sens contraire de sa direction actuelle ; pour que la formule du premier cas s'appliquât encore, il faudrait appeler x non pas MR, mais $-$ MR. — Et de même pour les autres cas.

On voit donc que si l'on convient de considérer les coordonnées comme négatives quand elles se comptent en sens inverse du sens dans lequel elles se comptent dans le premier cas, la formule de transformation donnée ci-dessus doit être considérée comme tout-à-fait générale.

Avant de terminer ce qui concerne les Quantités Négatives, disons encore un mot de la transformation des coordonnées rectilignes en coordonnées polaires.



Soit M un point dont les coord. par rapport aux axes AX et AY sont x et y; et supposons qu'on veuille le rapporter à des coordonnées polaires en prenant A' pour pôle, et A'K parallèle à OX pour axe polaire. — On aura évidemment, en appelant a et b les coordonnées de A' par rapport aux anciens axes,

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = a + r\sin\theta \end{cases}$$

et l'on verra aisément que, quelle que soit la position du point M, si l'on convient que, θ étant toujours l'angle décrit par le rayon vecteur à partir de la position A'K, le sinus et le cosinus prendront les signes résultant des conventions faites sur les lignes trigonométriques, ces formules conviendront toujours, r étant considéré comme une quantité absolue, et θ variant de 0 à 2π; — et l'Eq.

$$f(a + r\cos\theta\,,\; b + r\sin\theta) = 0$$

résultant de la substitution de ces valeurs dans l'Eq.

$$f(xy) = 0$$

d'une courbe qcq. donnera tous les points qu'on eût obtenus par cette dernière Eq. — Il est clair dès lors que si, pour certaines valeurs de θ, cette Eq. donne pour r des valeurs négatives, elles devront être rejetées comme étrangères à la question.

Mais, ce qu'il convient de remarquer ici, c'est qu'on peut aussi admettre des valeurs négatives de r comme correspondant à des points de la courbe, à condition de porter sur le prolongement du rayon vecteur et non sur le rayon lui-même, ces valeurs négatives, fournies par une Eq. à laquelle on est arrivé par une pareille transformation de coordonnées.

En effet, supposons que, pour $\theta = \alpha$, on ait une certaine valeur négative de r, $r = -m$, et imaginons qu'on fasse $\theta = \alpha + \pi$; Il est évident que par là, le sinus et le cosinus changeront de signes en gardant les mêmes valeurs absolues. Donc l'Eq. sera satisfaite par $\theta = \alpha + \pi$ et $r = m$. on aura donc un point de la courbe situé sur le rayon donné par $\theta = \alpha + \pi$, et à une distance m de l'origine. Or on aurait eu évidemment le même point en portant la longueur m sur le rayon donné par $\theta = \alpha + \pi$ ou sur le prolongement du rayon donné par $\theta = \alpha$. — Donc, en convenant que les valeurs négatives de r seront portées sur le prolongement du rayon vecteur, on pourra admettre des valeurs néga.

-tives de r, puisque ainsi l'on obtiendra deux points qui auraient été donnés par des valeurs positives du rayon vecteur répondant à un angle polaire plus grand de π que celui qui avait fourni la valeur né-gative. — Et de plus il est facile de voir que, mo-yennant cette convention, on pourra se contenter de faire varier θ de 0 à π.

On voit donc qu'ici encore on est libre d'ad-mettre ou de rejeter les solutions négatives. — On les admet si l'on veut se dispenser de donner à θ des valeurs supérieures à π. — Mais alors il faut né-cessairement les considérer comme représentant des longueurs portées sur le prolongement du rayon vecteur.

Ce que nous venons de voir s'applique seulem^t. au cas d'une Eq. résultant d'une transformation de coordonnés rectilignes en coordonnés polaires, et à une Eq. complète seulement. — Il arrive sou-vent que l'Eq. polaire résultant d'une pareille trans-formation se partage en deux autres, par ex. pour l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes. — Le théorème précédent ne s'applique plus à chacun des facteurs isolés, mais à leur ensem-ble.

Ce que nous venons de voir ne subsiste plus quand l'Eq. en coordonnées polaires considérée

a été fournie par des considérations directes, des constructions géométriques, etc. Il faut dans chaque cas une discussion spéciale qui détermine si r doit ou non prendre des valeurs négatives, et entre quelles limites doit varier θ, et si θ lui-même peut devenir négatif.

Prenons pour exemple de cette discussion la Spirale d'archimède. – Cette Spirale peut être considérée comme engendrée par un point qui se mouvrait uniformément sur une droite se mouvant elle-même d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un point fixe.

Supposons qu'à un instant donné, la droite mobile fasse un angle α avec la droite OX que nous prenons pour axe polaire, et que le point mobile ait déjà dépassé le point fixe, et en soit déjà à une distance m. Si nous considérons une position du point mobile dans l'avenir, en appelant a la vitesse angulaire de la droite et θ l'angle que fait cette droite avec une droite fixe, nous aurons

$$r = m + a(\theta - \alpha)$$

α étant l'angle de la droite mobile avec la droite fixe, correspondant à la distance m: – et toutes les positions du mobile dans l'avenir seront données par cette Eq., θ pouvant croître indéfiniment, puisque, par la nature même de son mouvement, la

droite peut faire une infinité de révolutions autour du point O. — Voyons à quelle condition cette Eq. pourra représenter les positions du point mobile dans le passé.

Si nous supposons que le rayon vecteur soit toujours situé au dessus de OX, le mobile ayant déjà dépassé le point O, nous aurons

$$r = m - a(\alpha - \theta) = m + a(\theta - \alpha)$$

La même Eq. convient, tant que le point est au-dessus de la droite fixe. — Or, si l'on suppose que le point est au-dessous, on verra que cette Eq. satisfera encore si l'on convient de désigner par θ non plus l'angle du rayon vecteur avec la droite mobile, mais cet angle diminué de 2π.

En continuant ainsi de considérer les positions du mobile dans le passé, nous arrivons à l'instant où le point M était à l'origine, et nous avons alors

$$r = m + a(\theta - \alpha) = 0$$

on conçoit donc que si, dans cette expression, nous donnons à θ des valeurs négatives plus grandes en valeur absolue, nous aurons pour r des valeurs négatives. — or on trouve qu'effectivement ces valeurs négatives doivent être admises, si l'on veut que l'Eq. convienne aussi au cas où le mobile n'a pas encore atteint le point O, à condition qu'elles soient portées sur le prolongement du rayon vecteur.

On trouve ainsi que, dans ce cas, pour qu'une Eq. unique puisse représenter toute la courbe, il faut

faire varier θ de $-\infty$ à $+\infty$ et admettre les valeurs négatives du Rayon vecteur, avec la convention que nous avons établie.

On ferait une discussion analogue et l'on serait conduit aux mêmes résultats en cherchant à représenter en coordonnées polaires par une seule Eq. la courbe telle que tous les rayons vecteurs d'un point fixe soient également inclinés sur la tangente.

On dit quelquefois que les Quantités négatives sont plus petites que zéro, et que, deux quantités négatives, la plus petite est celle qui a la plus grande valeur absolue.

Ce sont là des expressions dont il est facile de se rendre compte. on a souvent en effet à transformer des inégalités telles que

$$a > b$$

Il est évident que, si nous retranchons des deux membres de cette inégalité une quantité moindre que chacun d'eux, l'inégalité subsiste dans le même sens. Or si l'on a à retrancher des deux membres une quantité telle qu'on ne sache pas si elle est plus petite que chacun d'eux, il faut, ou se l'interdire, ce qui serait fort peu commode, ou admettre qu'une quantité négative est moindre que zéro, et que, de deux quantités négatives, la plus petite est celle dont la valeur absolue est la plus grande. — Cette convention

de langage doit être encore admise si l'on veut pouvoir dire dans tous les cas que si, à un même nombre, on ajoute deux nombres négatifs, le plus petit résultat provient de l'addition du plus grand nombre.

On objecte quelquefois à cette locution qu'elle est en désaccord avec un fait résultant de la théorie des proportions. — On a

$$5 : 2 :: 10 : 4$$

5 étant > 2, on en conclut que 10 doit être plus grand que le quatrième terme. — Or, dans la proportion

$$1 : -1 :: -1 : 1$$

si l'on admet que les quantités négatives soient moindres que les quantités positives, on voit que le premier terme est plus grand que le second, et le troisième plus petit que le quatrième. — La réponse à cette objection résulte d'une remarque faite précédemment. — Nous avons vu en effet que, quand on fait une convention destinée à généraliser quelque résultat, il faut que les conventions ultérieures ne soient pas en désaccord avec les premières. Donc, si nous voulons pouvoir dire que les quantités négatives sont d'autant plus petites que leur valeur absolue est plus grande, et qu'elles-mêmes

sont moindres que les quantités positives, il faudra nous abstenir d'étendre à des proportions où entreront des termes négatifs cette propriété des proportions à termes positifs, savoir : que l'ordre de grandeur des termes des deux rapports est le même.

Des Quantités Imaginaires.

Quand on discute la formule des Symboles Ima-
-ginaires généraux qui donne les Racines d'une Eq.
du Second degré, on arrive pour certaines hypothèses
à des expressions où entrent des Radicaux portant sur
des quantités négatives. — Ces expressions ne Signi-
-fient Rien par elles-mêmes.

Cependant ces quantités, si on les Substitue à la
place de la variable dans l'Eq. d'où elles proviennent,
vérifient cette Eq., si l'on admet que le carré d'un
Radical portant sur une quantité négative est cette
quantité elle-même, et que deux quantités de cette nature
où les coefficients et les quantités sous le Radical se
détruisent quand elles sont affectées de Signes Contraires.

ainsi, soit donnée l'Eq.

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$$

on voit qu'elle peut s'écrire ainsi

$$(x-a)^2 + b^2 = 0$$

on voit que cette Eq. est impossible. — Mais
supposons que l'on passe outre sans le Remarquer.
on en tire :

$$x - a = \pm\sqrt{-b^2}$$

$$x = a \pm \sqrt{-b^2}$$

Nous arrivons à une expression Imaginaire. — On ne peut rien conclure de là, sinon que l'Eq. proposée est absurde. — Cependant il est bon de remarquer que si nous remontons par tous les calculs qui nous ont conduit à ce résultat, c. à d. que si nous admettons que de $x = a \pm \sqrt{-b^2}$ ou $x - a = \pm\sqrt{-b^2}$ on conclut algébriquement $(x-a)^2 = -b^2$ ou $(x-a)^2 + b^2 = 0$, nous retombons sur l'Eq. primitive ; — ou, ce qui revient au même, si nous mettons $a \pm \sqrt{-b^2}$ au lieu de x dans l'Eq. proposée, à condition de traiter $\sqrt{-b^2}$ comme un radical ordinaire dont le carré serait $-b^2$, l'Eq. se réduira à $0 = 0$. — Et nous sommes bien libres de dire que $a \pm \sqrt{-b^2}$ est racine de l'Eq. proposée, pourvu que nous n'entendions par là autre chose, sinon que $a \pm \sqrt{-b^2} = x$ a été déduit de l'Eq. proposée par une suite d'identités algébriques, et que, substituer $a \pm \sqrt{-b^2}$ dans l'Eq., ce n'est que remonter la suite d'identités qui a conduit à cette expression.

Ces quantités de la forme $\sqrt{-b^2}$, qui n'ont aucune signification par elles-mêmes, on les admet dans le calcul comme moyen de transformation algébrique. — Ainsi, dans le calcul intégral, on sait de quelle utilité il peut être de transformer un polynôme en un autre algébriquement identique au précédent, et où les facteurs simples sont en évidence.

Les Racines Imaginaires des Eq. y jouent par suite un grand Rôle, mais un Rôle transitoire, elles servent seulement comme moyen de transforma.tion par identités.

Et d'abord, ce n'est pas sous la forme $\sqrt{-b^2}$ qu'on les conserve. Il est évident en effet que, si l'on introduit volontairement et dans un but déter.miné la quantité $\sqrt{-b^2}$ dans un calcul, en la considérant comme une quantité dont le carré est $-b^2$, le cube $-b^2\sqrt{-b^2}$, etc., il reviendra au même, en regardant $-b^2$ comme le produit de b^2 par -1, de l'écrire $b\sqrt{-1}$, et cette quantité aura évidemment pour carré, pour cube, etc. les mêmes expressions que $\sqrt{-b^2}$, en convenant que le carré de $\sqrt{-1}$ est -1, que son cube est $-\sqrt{-1}$, etc. — C'est une forme tout-à-fait équivalente à la première, et plus commode.

Cela posé, toutes les fois qu'on écrit une Eq. où entrent des Quantités Réelles et des Quantités Imaginaires, c'est qu'il a été démontré d'avance que les parties Réelles des deux membres sont Éga.les, ainsi que les coefficients de $\sqrt{-1}$. Il ne peut donc y avoir aucun doute sur le sens que l'on doit attacher à cette Eq. Il n'est pas exact de dire, comme on le fait qqf. dans les traités Élémen.taires, qu'une Eq. entre des Quantités réelles et des

quantités Imaginaires ne peut subsister qu'autant que les parties réelles des deux membres sont égales, ainsi que les coefficients de $\sqrt{-1}$. on n'écrit une pareille équation que quand on a reconnu que ces deux égalités ont lieu séparément. – Une pareille Eq. peut être établie : quant à l'usage qu'on en peut faire, nous allons le voir.

Prenons pour cela des Exemples.

Soit proposé de multiplier $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$ par $\cos y + \sqrt{-1}\sin y$, en faisant sur $\sqrt{-1}$ les conventions précédemment expliquées. – Cette multiplication n'a évidemment pas de sens, cependant le résultat, comme nous le verrons, présente une grande utilité. En effectuant la multiplication, et faisant les conventions indiquées, il vient

$$\left(\cos x + \sqrt{-1}\sin x\right)\left(\cos y + \sqrt{-1}\sin y\right) = \cos x\cos y - \sin x\sin y + \sqrt{-1}\left(\sin x\cos y + \cos x\sin y\right)$$

$$= \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y)$$

Nous trouverions de même

$$\left(\cos x + \sqrt{-1}\sin x\right)\left(\cos y + \sqrt{-1}\sin y\right)\left(\cos z + \sqrt{-1}\sin z\right) = \cos(x+y+z) + \sqrt{-1}\sin(x+y+z)$$

et en général

$$\left(\cos x + \sqrt{-1}\sin x\right)\left(\cos y + \sqrt{-1}\sin y\right)\cdots\left(\cos v + \sqrt{-1}\sin v\right) = \cos(x+y+\cdots+v) + \sqrt{-1}\sin(x+y+\cdots+v)$$

Si l'on suppose tous les arcs égaux, on a la formule

$$\left(\cos x + \sqrt{-1}\sin x\right)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx$$

or, au lieu de multiplier successivement entre eux tous les facteurs du premier membre, il revient évidemment au même de développer ce premier membre par la formule du binome, en traitant toujours $\sqrt{-1}$ comme un radical ordinaire : et nous serons sûrs, d'après la démonstration précédente, que la partie réelle du développement donnera $\cos mx$, et que le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera $\sin mx$. — or, si nous développons $(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m$, il vient

$$\begin{array}{l|l} \cos^m x & +\sqrt{-1}\; m\cos^{m-1}x\sin x \\ -\frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}x\sin^2 x & -\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}x\sin^3 x \\ +\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}x\sin^4 x & +\text{etc.} \\ -\text{etc} & \end{array}$$

et partant, comme nous savons à priori que la partie réelle est $= \cos mx$ — etc. :

$$\left\{\begin{array}{l} \cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}x\sin^2 x + \cdots \\ \\ \sin mx = m\cos^{m-1}x\sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \cdots \end{array}\right.$$

et nous sommes parvenus ainsi par ce procédé assez singulier à des formules très utiles. — Ces formules, on les démontrerait si l'on voulait par une autre voie plus directe, mais plus pénible.

Nous pouvons remarquer que la formule qui donne le produit d'un certain nombre de facteurs

tels que $\cos x + \sqrt{-1} \sin x$ n'est pas restreint au cas où les deux termes de ces facteurs ont le signe +. Soit en effet,

$$\cos a - \sqrt{-1} \sin a$$

on peut toujours l'écrire ainsi

$$\cos(-a) + \sqrt{-1} \sin(-a)$$

or la formule relative au produit d'expressions de cette forme a lieu évidemt. quelle que soit la valeur de l'arc. Seulement dans ce cas l'arc a doit être retranché au lieu d'être ajouté.

La formule

$$\left(\cos x + \sqrt{-1} \sin x\right)^m = \cos mx + \sqrt{-1} \sin mx$$

n'a été démontrée que pour m entier et positif. Nous pouvons facilement l'étendre au cas où m est fractionnaire ou négatif. — Et d'abord remarquons que les deux expressions

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x \quad \text{et} \quad \cos x - \sqrt{-1} \sin x$$

sont réciproques l'une de l'autre. — on le démontre, soit en faisant le produit, ce qui donne

$$\left(\cos x + \sqrt{-1} \sin x\right)\left(\cos x - \sqrt{-1} \sin x\right) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

soit en appliquant la formule

$$\left(\cos x + \sqrt{-1} \sin x\right)\left(\cos y - \sqrt{-1} \sin y\right) = \cos(x-y) + \sqrt{-1} \sin(x-y)$$

ce qui donne pour le produit des deux facteurs considérés $\cos 0 = 1$.

Cela posé, de ce qu'on a

$$\left(\operatorname{Cos} x + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} x\right)^m = \operatorname{Cos} mx + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} mx \quad ;$$

il résulte immédiatement que pour extraire la racine $m^{ième}$ d'une expression de la forme $\operatorname{Cos} x + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} x$, m étant entier, il faut diviser x par m.

actuellement, supposons qu'on veuille avoir l'expression $\left(\operatorname{Cos} x + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} x\right)^{\frac{p}{q}}$; cette expression signifie évidemment qu'on doit extraire la racine d'indice q de $\operatorname{Cos} x + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} x$, et élever le résultat à la puissance p. or on a d'après ce qui précède :

$$\left(\operatorname{Cos} x + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} x\right)^{\frac{1}{q}} = \operatorname{Cos} \frac{x}{q} + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} \frac{x}{q}$$

$$\left[\left(\operatorname{Cos} x + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} x\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p = \left(\operatorname{Cos} x + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} x\right)^{\frac{p}{q}} = \operatorname{Cos} \frac{p}{q} x + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} \frac{p}{q} x$$

La formule

$$\left(\operatorname{Cos} x + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} x\right)^m = \operatorname{Cos} mx + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} mx$$

subsiste donc encore pour m positif et fractionnaire.

Supposons $m = -n$. — on a

$$\left(\operatorname{Cos} x + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} x\right)^{-n} = \frac{1}{\operatorname{Cos} nx + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} nx}$$

Mais nous avons remarqué précédemment qu'une expression de la forme $\operatorname{Cos} mx + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} mx$ a pour réciproque $\operatorname{Cos} mx - \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} mx$. Donc

$$\left(\operatorname{Cos} x + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} x\right)^{-n} = \operatorname{Cos} nx - \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin} nx = \operatorname{Cos}(-nx) + \sqrt{-1}\,\operatorname{Sin}(-nx)$$

Donc la formule subsiste encore pour m négatif. — Elle a donc lieu quel que soit m.

Ce qui précède nous permet de trouver

l'expression algébrique des racines d'une Eq. de la forme

$$x^m = \pm 1$$

on sait que cette Eq. a m racines. — Considérons d'abord le signe $+$. Nous pouvons écrire

$$1 = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$$

pourvu que $\cos\varphi = 1$ et $\sin\varphi = 0$, ce qui donne pour φ la valeur

$$\varphi = 2n\pi\ .$$

L'Eq. deviendra alors

$$x^m = \cos 2n\pi + \sqrt{-1}\sin 2n\pi$$

d'où

$$x = \cos\frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}$$

or on voit que si l'on fait varier n de 0 à m, cette expression nous fournit m valeurs différentes de x, et que, si l'on fait $n > m$, on retombe sur une des valeurs déjà trouvées pour x. Donc cette Eq. nous donne bien les m racines de l'Eq. $x^m = 1$.

Si l'on avait voulu résoudre l'Eq.

$$x^m = -1$$

il aurait fallu poser

$$\varphi = (2n+1)\pi$$

et on serait arrivé au résultat de la même manière.

De même, soit proposé d'extraire la racine

d'indice m de $a+b\sqrt{-1}$, c.a.d. de trouver une expression qui, élevée à la puissance m, reproduira identiquement l'expression proposée. — Pour cela, nous mettrons $a+b\sqrt{-1}$ sous la forme

$$k\left(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right)$$

Cette égalité exige qu'on ait

$$k\cos\varphi = a \quad , \quad k\sin\varphi = b$$

d'où

$$k=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \cos\varphi=\frac{a}{K} \qquad \sin\varphi=\frac{b}{K}$$

φ doit donc avoir la forme

$$\varphi=\alpha+2n\pi$$

α étant le plus petit arc dont le sinus et le cosinus satisfont aux égalités écrites ci-dessus. — Nous aurons alors

$$a+b\sqrt{-1}=\sqrt{a^2+b^2}\left[\cos(\alpha+2n\pi)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+2n\pi)\right]$$

d'où

$$\sqrt[m]{a+b\sqrt{-1}}=\sqrt[2m]{a^2+b^2}\left[\cos\frac{\alpha+2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{\alpha+2n\pi}{m}\right]$$

et, pour avoir les m valeurs du radical dans la dernière formule, il faut faire varier n de zéro à $m-1$.

On peut résoudre ainsi les éq. trinômes de la forme

$$x^{2m}+px^m+q=0$$

Posons

$$x^m=y$$

d'où

$$y^2 + py + q = 0$$

Cette Equation du second degré étant résolue, si ses racines sont réelles, on aura les 2m racines de l'Eq. proposée en extrayant la racine m^e. de chacune de ces racines, par la formule donnée dans le cas de $x^m = \pm 1$, et qu'il est aisé d'étendre au cas de $x^m = \pm a$. — Si ces racines sont imaginaires, on extraira encore la racine m^e. de chacune d'elles par la formule donnée précédemment.

Cherchons encore des formules qui donnent le développement de la puissance m d'un Sinus ou d'un Cosinus en fonction des Sinus et des cosinus des arcs multiples. Et, pour mieux mettre en évidence l'esprit de la méthode, nous n'introduirons pas d'abord les quantités imaginaires.

Si nous désignons par λ une quantité quelle qu'elle soit, nous aurons évidemt. l'identité

$$\text{Cos}\,x = \frac{\text{Cos}\,x + \lambda\,\text{Sin}\,x - \lambda\,\text{Sin}\,x + \text{Cos}\,x}{2} \qquad (A)$$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cos}\,x + \lambda\,\text{Sin}\,x = u \\ \text{Cos}\,x - \lambda\,\text{Sin}\,x = v \end{array} \right.$$

Nous aurons évidemt.

$$u + v = 2\,\text{Cos}\,x \qquad u - v = 2\lambda\,\text{Sin}\,x$$

or, considérons d'abord la première égalité. On en tire :

$$\left.\begin{aligned} 2^m \cos^m x = u^m + m u^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1.2} u^{m-2} v^2 + \cdots \\ + \frac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^{m-2} + m u v^{m-1} + v^m \end{aligned}\right\} (B)$$

et cette formule est exacte quel que soit λ, puisque les termes en λ se détruisent dans l'égalité (A) et par suite dans toutes celles qu'on en peut déduire. Or nous pouvons concevoir la formule (B) ordonnée suivant les puissances de λ, et, pour que λ disparaisse de cette formule, il faut nécessairement que les coefficients de ses différentes puissances soient nuls d'eux-mêmes. Dès lors, nous pouvons mettre pour λ, $\sqrt{-1}$, en le traitant de telle manière que nous l'entendrons, et cela n'influera en rien sur les coefficients de λ ou de $\sqrt{-1}$ dans l'expression précédente, et n'empêchera pas ces coefficients d'être identiquement nuls. — Or je puis convenir entre autres, en mettant $\sqrt{-1}$ au lieu de λ, de le traiter de la manière dont nous sommes convenus jusqu'ici, à cause des résultats simples auxquels je serai conduit par là. — En effet, il vient ainsi

$$uv = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)(\cos x - \sqrt{-1} \sin x) = 1$$

et par suite uv et toutes ses puissances ont pour valeur 1. — Groupant tous les termes, nous pourrons mettre l'identité (B) sous la forme

$$2^m \cos^m x = (u^m + v^m) + \frac{m}{1}(u^{m-2} + v^{m-2}) uv + \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-4} + v^{m-4}) u^2 v^2 + \text{etc.}$$

or on a
$$\begin{cases} u^k = \cos kx + \sqrt{-1}\sin kx \\ v^k = \cos kx - \sqrt{-1}\sin kx \end{cases}$$

$$u^k + v^k = 2\cos kx$$

Substituant :

$$2^m \cos^m x = 2\cos mx + 2\frac{m}{1}\cos(m-2)x + 2\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \text{etc.}$$

et cette formule est évidemment légitime, puisqu'elle était exacte quel que fût λ, et par suite, en mettant $\sqrt{-1}$ à la place de λ. – Nous avons donc une formule, établie très-simplement qui nous donnera $\cos^m x$ en fonction des cosinus des multiples successifs de x.

Si l'on voulait avoir le développem^t. de $\sin^m x$ en fonction du sin. et des cos. des multiples successifs de x.

Si l'on voulait avoir le développement de $\sin^m x$ en fonction des sinus et des cosinus des multiples successifs de l'arc. On élèverait à la puissance m. les ~~de~~ deux membres de l'égalité $2\lambda\sin x = u - v$, et on ferait $\lambda = \sqrt{-1}$.

On voit que, dans ces dernières applications, l'utilité de l'introduction des quantités imaginaires est du genre de celle qu'on trouve dans l'analyse à introduire dans les calculs des termes qui se détruisent d'eux-mêmes, pour les grouper d'autre manière avec les autres termes des éq. et faire res-

-sortir certaines propriétés des Eq. ou, en Mécanique, à introduire dans les systèmes de nouvelles forces qui se détruiraient entre elles, pour les combiner avec les forces de ce système de manière à donner à ces systèmes de forces des formes qui permettent d'en déduire plus commodément des résultats utiles.

Mouvement

d'un

Corps Solide autour d'un Point.

Commencement d'un
Mémoire de Poinsot

Tout le monde se fait une idée nette du mouvement d'un point. Il n'en est pas de même du mouvement d'un corps dans l'espace, quoiqu'on puisse le décomposer pour ainsi dire en deux, le mouvement d'un point fixe du corps dans l'espace, et le mouvement du corps autour de ce point: car ce mouvement ne présente lui-même qu'une idée fort obscure.

L'analyse a bien permis de trouver les Eq. différentielles du mouvement, et même de les intégrer dans un grand nombre de cas. Mais ces calculs ne donnent que le résultat final: on ne voit pas le mouvement du corps

C'est cette idée claire du mouvement de rotation que nous allons tâcher d'exposer, et cela nous donnera une solution nouvelle du problème de la rotation d'un corps, solution géométrique à laquelle il sera facile d'appliquer le calcul, et qui présentera cet avantage que tout s'y exprimera et s'y développera par les seules données immédiates du problème, sans aucun mélange de ces coordonnées qui n'ont aucun rapport avec la question.

Cet ouvrage se divisera en trois parties. Dans la première, après avoir considéré le mouvement des corps en

lui-même, on cherche les forces qui seraient capables de le produire, afin de voir réciproquement quel est le mouvement que doit prendre un corps en vertu de forces quelconques données, ce qui est le problème naturel de la dynamique. — Dans la seconde partie, on donne la solution du problème de la rotation des corps libres; — et, dans la troisième, on développe les calculs qui se rapportent à cette solution.

Première Partie.

Chapitre Premier.

Du mouvement des corps considéré en lui-même.

I.

Idée de la Rotation simple et de la vitesse angulaire.

1. Le seul mouvement de Rotation dont nous ayons une idée parfaitement nette est celui d'un corps qui tourne sur un axe immobile dans l'espace. On voit alors clairement les cercles que décrivent tous les points du corps dans des plans perpendiculaires à l'axe: on voit clairement la possibilité de ce mouvement sans que la figure du corps soit changée.

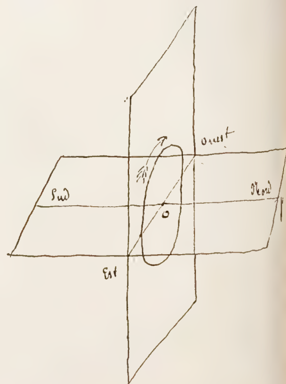
2. Nous avons également une idée nette de la quantité ou de la mesure de cette Rotation: car, tous les points décrivant dans le même temps des arcs de cercle semblables, le Rapport de la vitesse d'un point au Rayon du cercle qu'il décrit est le même pour tous les points du corps. C'est ce Rapport qu'on appelle vitesse angulaire. — appelons-la θ. θr sera la vitesse d'un point situé à une distance r de l'axe; θ est la vitesse absolue d'un point pris à une distance de l'axe égale à l'unité.

II.

Composition des mouvements de Rotation.

3. On peut voir aisément que de pareilles Rotations se composent exactement par la même loi que de simples forces. C'est ce que la théorie des couples rend manifeste quand on considère plusieurs couples appliqués sur une sphère homogène : car il est évident que chaque couple, s'il était seul, tendrait à faire tourner la sphère autour de l'axe de ce couple avec une vitesse angulaire proportionnelle au moment de ce couple, que par conséquent, si tous ces couples agissent à la fois, comme leur effet est le même que celui du couple résultant, la sphère doit tourner sur l'axe de ce couple avec une vitesse angulaire proportionnelle à son moment. D'où l'on voit que les mouvements de Rotation se composent et se décomposent exactement par les mêmes lois que les couples, et partant, que les simples forces.

4. Mais cette composition des mouvements de rotation, nous allons la démontrer par la simple Géométrie. — Pour cela, nous représenterons les Rotations par de simples lignes terminées, op, oq, etc. prises sur leurs axes : et chacune de ces lignes, telle que op, représentera à la fois l'axe et la grandeur de cette Rotation p, et on indiquera encore le sens par cette convention

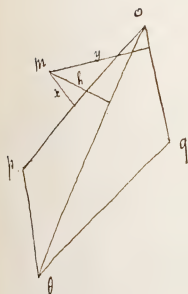


qu'en se plaçant à l'extrémité p considérée comme le Nord pour regarder devant soi le point o considéré comme le midi, la Rotation se fera de Gauche à droite, comme le mouvement apparent du soleil.

III.

Parallélogramme des Rotations.

5. Si, par deux causes qcq. un corps tend à la fois à prendre deux Rotations p et q représentées par les deux côtés op, oq d'un parallélogramme $op\theta q$, le corps prendra une Rotation unique θ représentée par la diagonale $o\theta$ de ce parallélogramme.



Il suffit de prendre un point m du corps situé dans le plan du parallélogramme. Soient x et y les perp. abaissées de ce point sur les axes op, oq. Il est clair que, par la seule Rotation p, le point tend à s'élever au dessus du plan avec une vitesse px; et, par la seule Rotation q, avec une vitesse qy. Il a donc, en vertu des deux causes, la vitesse $px+qy$. Or, en appelant h la perp. abaissée du point m sur la diagonale, on a

$$px + qy = \theta h$$

Donc la vitesse que prend le point est égale à θh, c.à.d. à la vitesse qu'il aurait si le corps tournait sur la diagonale avec une vitesse θ. D'ailleurs le point m entraîne tout le corps. Donc .. etc.

Rem. Le point m pourrait être pris dans l'angle

poq. on verrait alors qu'il tend à s'élever au-dessus du plan avec la vitesse $px-qy$. or ici $px-qy$ serait égal à θh comme précédemment. donc le théorème se démontrerait de la même manière.

6. au reste, ceci donne l'idée d'un théorème de géométrie plus général que le précédent. — car, supposez le point m pris où vous voudrez dans l'espace, et soient toujours x, y, h les distances aux côtés op, oq et à la diagonale, px, qy et θh seront toujours les vitesses que le point m tendrait à prendre par suite des rotations op, oq et $o\theta$. Mais ici, ces vitesses ne seraient plus dans la même direction. Elles sont respectivement perp. aux plans des trois triangles mop, moq, $mo\theta$. Les lignes qui les représentent font donc entre elles les mêmes angles que les plans de ces triangles, et sont d'ailleurs proportionnelles à leurs aires, et puisque le point m, en vertu des rotations p et q doit se mouvoir comme s'il était sollicité par la rotation θ, il s'ensuit que θh est la diagonale du parallélogramme construit sur px et sur qy. — on a donc ce théorème de géométrie :

Si d'un point qcq. m de l'espace comme sommet, on mène trois triangles qui aient pour bases les deux côtés op, oq et la diagonale $o\theta$ d'un parallélogramme, il y a toujours entre les aires de ces trois triangles la même relation qu'entre les côtés et la diagonale d'un parallélogramme construit sous les inclinaisons mutuelles de ces trois plans.

7. D'ailleurs ce théorème se voit immédiatement par la Géométrie. Car, au lieu des trois triangles, considérez les trois Rhombes faits sur le même côté om, appuyés sur les bases op, oq, oθ, et dont les aires sont px, qy, θh. Il est évident que ces trois Rhombes, qui forment les plans adja-cents et le plan diagonal d'un Rhomboïde ayant pour base opθq, ayant même base om, sont entre eux comme leurs hauteurs, et par conséquent comme les trois lignes qui résulteraient de l'intersection du Rhomboïde par un plan perp. à l'arête om. Or ces lignes forment évidemment les deux côtés et la base d'un parallélogramme construit sous les inclinaisons mutuelles des trois plans. Donc etc.

actuellement, si l'on imagine que le point m descende de l'Espace pour tomber dans le plan du parallélogramme, et dans le supplément de l'angle poq et de son opposé au sommet, il est visible que l'inclinaison des triangles mop, moq va en diminuant et devient enfin nulle, et alors le triangle moθ construit sur la diagonale devient égal à la somme des deux autres, comme la diagonale d'un parallélogramme devient égale de à la somme des deux côtés qui la comprennent, quand l'in-clinaison de ces côtés devient nulle.

Pareillement, si le point m tombe dans l'angle

poq ou dans son opposé au sommet, le triangle $mo\theta$ construit sur la diagonale devient égal à la différence des deux autres.

Ainsi ce théorème si très connu, que Lagrange attribue à Varignon, n'est qu'un cas particulier du nôtre, et, comme celui-ci est très facile à démontrer directement, on en peut tirer une démonstration du parallélogramme des rotations plus nette que la première, puisqu'on prend le point m où l'on veut.

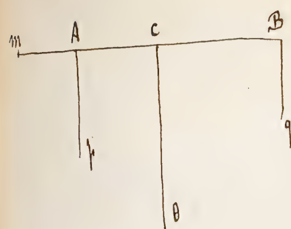
Corollaire. – 8. – De ce parallélogramme des rotations, il est clair qu'on peut s'élever à la composition d'autant de rotations qu'on voudra op, oq, or etc. et parvenir ainsi à leur résultante générale $o\theta$ en les composant successivement deux à deux à la manière des simples forces concourantes.

Et cette similitude de composition s'étend à des rotations autour d'axes situés d'une manière qcq. dans l'espace.

IV.

Composition de deux Rotations autour de deux axes parallèles.

9. Deux rotations p et q de même sens autour de deux axes parallèles se composent en une seule θ égale à leur somme $p+q$ autour d'un axe parallèle aux deux premiers et qui divise leur distance mutuelle dans la raison inverse des deux rotations composantes p et q.



Soient en effet Ap et Bq les deux rotations parallèles. Soit m un point qcq. pris dans le plan des axes. Si l'on nomme x et y les deux perp. abaissées de ce point sur Ap et sur Bq, il est clair que par la rotation p le point m tend à s'élever au-dessus du plan avec la vitesse px, et, par la rotation q, il tend à s'élever avec la vitesse qy. En vertu des deux rotations, il a, suivant la normale, la vitesse $px+qy$. Or, en appelant h la perp. abaissée de m sur $C\theta$, on a

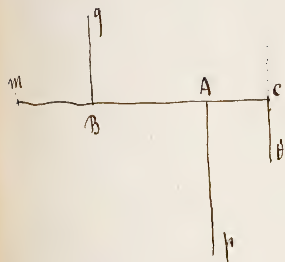
$$h-x : y-h :: q : p$$

d'où

$$qy+px=(p+q)h$$

ce qui démontre le théorème.

10. Si les deux rotations parallèles étaient de sens contraires, on verrait de même qu'elles se composent en une seule θ égale à leur différence $p-q$ et autour d'un axe parallèle $C\theta$ dont on trouverait la position comme on trouverait celle de la résultante de deux forces parallèles et contraires p et q. — ainsi, en nommant i la distance de $C\theta$ au premier axe Ap par exemple, et D la distance mutuelle de Ap et Aq, on aurait



$$i=D\frac{q}{p-q}$$

11. Si p et q différaient peu l'un de l'autre, la ro.

-tation résultante $\theta = p - q$ serait très-petite, et la distance i de son axe au premier axe Ap serait très-grande ; de sorte que si p et q deviennent parfaitement égales, on trouve une rotation θ nulle autour d'un axe situé à une distance infinie, ce qui n'apprend plus rien, ou plutôt ce qui nous avertit que, dans ce cas particulier, il n'y a plus à proprement parler de rotation résultante, et que le mouvement du corps doit changer de nature. Nous allons voir en effet que de ces deux rotations parallèles, égales et contraires, il ne peut résulter qu'un pur mouvem^t. de translation dans l'espace.

V.

Des Couples de Rotations.

12. Deux rotations p et $-p$ égales et de sens contraires autour de deux axes parallèles forment ensemble ce que l'on appelle un Couple de Rotations.

On peut voir à priori qu'un tel couple est irréductible.

Le mouvement qui résulte d'un couple de rotations p et $-p$ est une pure translation de tous les points du corps suivant des lignes perp. au plan du couple, et avec une commune vitesse mesurée par le moment du couple, c.à.d. par le produit pD de l'une de ces deux rotations multipliée par la distance D qui sépare leurs axes parallèles.

Et en effet, considérez un point qcq. m du corps

pris dans le plan de ce couple à la distance x du premier axe p, et par conséquent à la distance $x-D$ du second $-p$. Par la rotation p, le point m s'élève suivant la perp. au plan avec la vitesse px. Par la rotation $-p$, il s'abaisse en sens contraire avec une vitesse $p(x-D)$: de sorte qu'il a suivant la normale la vitesse $px-p(x-D)$ ou pD. Donc, comme x n'entre plus dans cette expression, tous les points du plan, et par conséquent tous ceux du corps ont la même vitesse pD suivant la perp. au plan du couple. Donc etc.

13. On voit par là qu'un couple de rotation peut être transporté d'une manière qcq. dans son plan ou dans tout autre plan parallèle, et qu'il peut être transformé d'une manière qcq. pourvu que son moment ne change pas.

14. De cette propriété et du parallélogramme des rotations simples on conclut la composition de ces couples de rotations et l'on en déduit qu'on peut appliquer aux nouveaux couples tous les théorèmes qui concernent les couples ordinaires.

15. C'est d'ailleurs ce qu'on verrait sous un nouveau jour si l'on voulait considérer la cause capable de donner au corps le même mouvement qui résulte d'un couple de rotation. Car il est clair que ce mouvement pourrait être produit par une simple force appliquée au centre de gravité du corps perpendiculairement au plan du couple et égale au produit du moment du couple par la masse entière du

corps. Tous les couples de Rotations pourront ainsi être Remplacés par des forces passant au centre de Gravité du corps. D'où résulte pour ces couples une composition Exactement la même que celle des forces autour d'un point. Mais ce sont là des considérations Dynamiques que nous Rejetons pour tirer tout de la Géométrie.

VI.

Composition Générale des Rotations autour d'axes situés comme on veut dans l'Espace.

16. Considérons d'abord une simple Rotation p autour d'un axe Ap passant par un point qcq. A du corps. Si, en un autre point o, pris où l'on voudra, on imagine deux Rotations contraires p' et −p' égales et parallèles à la première p, il est clair que ces deux Rotations se détruisent d'elles-mêmes, et que le mouvement du corps n'est pas changé. Mais alors, au lieu de la simple Rotation proposée p, on peut voir : 1°. une Rotation p', égale, parallèle et de même sens, mais dont l'axe passe en o ; 2°. un couple (p, −p') formé des deux Rotations parallèles restantes p et −p'. Si, pour plus de clarté, on transporte ce couple ailleurs, dans un plan qcq. parallèle au sien, ce qui est permis, il ne restera au point o que la Rotation p', laquelle n'est pour ainsi dire que la Rotation proposée p qu'on y aurait transportée parallèlement à elle-même.

on peut donc dire qu'une Rotation peut être transportée parallèlement à elle-même en un point qcq. de l'espace pourvu que l'on considère le couple de Rotations qui naît de ce déplacement et qui a pour Moment ou pour mesure le produit de la Rotation proposée par le chemin que son axe a parcouru.

17. Cela posé, soient tant de Rotations qu'on voudra, Ap, Bq, Cr, etc. Si on les transporte parallèlement à elles-mêmes en un point qcq. O de l'espace, elles viendront s'y composer en une seule θ qu'on peut nommer la Rotation Résultante: et tous les couples de Rotations qu'elles ont produits dans leur translation se composent en un seul (ρ, −ρ), qu'on peut nommer le Couple Résultant, réduction tout-à-fait semblable à celle des forces.

Il est parfaitement évident que la Rotation Résultante sera la même en quelque lieu qu'on ait pris le point O: tandis que le plan et la grandeur du couple (ρ, −ρ) changent avec la position de ce centre O.

18. Si l'on veut une réduction générale où il n'y ait rien d'arbitraire, on pourra toujours choisir le point O de manière que le plan du Couple Résultant soit perp. à l'axe de la Rotation Résultante. En effet, tout étant d'abord réduit à la Rotation θ et au couple (ρ, −ρ), relativement à un point qcq. O: décomposer le couple (ρ, −ρ) en deux autres, l'un (ρ', −ρ') dans un



plan perp. à l'axe $O\theta$, l'autre $(g''_1 - g'')$ dans un plan conduit par cet axe. Si vous transportez la rotation θ dans ce plan et parallèlement à elle-même jusqu'en $O'\theta$, de manière que le couple produit $(\theta, -\theta)$ soit égal et contraire au couple $(g'', -g'')$, et par conséquent le détruise, il ne restera que la rotation θ autour du nouvel axe $O'\theta$ avec le couple $(g', -g')$ dans un plan perpendiculaire au même axe, ce qu'il fallait trouver. Et cet axe singulier $O'\theta$ peut être nommé l'axe central des couples de rotations.

Ainsi :

Un système qcq. de rotations est toujours réductible à une seule rotation autour d'un certain axe déterminé, et à un couple de rotations situé dans un plan perp. à cet axe.

Et il est clair que ce couple résultant est le minimum de tous ceux qu'on trouverait relativement à tous les points ou centres O qui seraient pris hors de cet axe central. Car si l'on transportait partout ailleurs la rotation θ, elle produirait un couple $(\theta, -\theta)$ perpendiculaire sur le couple $(g', -g')$ et qui, en se composant avec lui, donnerait un couple résultant supérieur au couple $(g', -g')$.

19. De tout ce qui précède, il suit que

Le mouvement d'un corps, en vertu de tant de rotations qu'on voudra, se réduit, en dernière analyse, à tourner sur une certaine droite, et à glisser en même temps le long de cette droite : ce qui est, comme on le verra plus loin, le

mouvement le plus général que puisse avoir un corps.

20. Si le couple Résultant minimum est nul, tout le mouvement se Réduit à une simple Rotation. Si la Résultante est nulle, il se Réduit à une simple translation. Et Réciproquement chacune de ces deux Réductions ne peut avoir lieu que sans que la condition supposée ne soit remplie. Enfin, pour que toutes les Rotations du Système se détruisent entre elles, et qu'ainsi tout le mouvement du corps soit nul, il faut que la Résultante et le couple Résultant soient nuls tous les deux à-la-fois, et cela, en quelque lieu de l'Espace qu'on ait transporté toutes les Rotations.

Remarque. – on voit la parfaite symétrie de cette composition des Rotations et de celle des forces, symétrie telle que si l'on eût donné primitivement le nom de Force à la cause capable de faire tourner sur un axe, on aurait eu pour ces nouvelles forces une Statique toute semblable. Seulement ici les forces auraient Répondu à nos couples ordinaires, et les couples à nos forces. C'est là une chose très-Remarquable qu'un même livre, écrit sur la science des forces, pourrait, sans cesser d'être exact et de traiter Régulièrement la même science, être entendu de deux manières différentes, selon qu'on attacherait au mot de force l'idée d'une cause de translation, ou l'idée toute différente d'une cause de Rotation.

21. on vient de voir ce qui Regarde l'idée de la

Rotation simple sur un axe et la composition de semblables rotations autour d'axes situés d'une manière qcq. dans l'espace. — Mais il faut maintenant se faire une idée du mouvement d'un corps mobile autour d'un point fixe, sur lequel il semble pirouetter en tous sens.

VII.

Idée de la Rotation autour d'un Point.

22. Le mouvement d'un corps qui tourne sur un axe immobile étant le seul dont nous ayons une idée claire, c'est à cette idée qu'il faut tâcher de réduire celle du mouvement d'un corps qui pirouette d'une manière qcq. autour d'un point ou centre fixe O.

Or je dis que ce mouvement, quel qu'il soit, si on le regarde que pendant un instant, n'est autre chose qu'une rotation simple autour d'un certain axe passant par le point O, et dont la direction reste immobile pendant un instant. En effet, considérons deux points A et B du corps, qui, avec le point O, forment un triangle OAB. De quelque manière que le triangle se meuve, il est certain qu'au bout d'un instant on trouvera que le point A est arrivé quelqu'autre part en A', et le point B en B', de sorte que le triangle OAB aura pris dans l'espace la position infiniment voisine OA'B'. Or il est clair que ce mouvement peut être produit par deux rotations successives, l'une p autour de l'intersection OS des

deux plans OAB, OA'B', et qui amènerait le triangle OAB dans un même plan avec le triangle OA'B'; l'autre q autour de la perp. OH à ce plan, et qui amènerait le point A sur A', et par conséquent B sur B'. Mais ces rotations p et q autour de deux axes qui se croisent en O peuvent toujours se réduire à une seule θ autour d'un axe OI passant par le même point. Donc

De quelque manière qu'un corps se meuve autour d'un point fixe, son mouvement ne peut être, dans l'instant que l'on considère, qu'une simple rotation de ce corps autour d'un axe passant par ce point, et qui reste immobile dans le corps et dans l'espace pendant cet instant.

Dans l'instant suivant, le mouvement se fera de même, mais autour d'un autre axe, et ainsi de suite, de sorte que le mouvement total du corps peut être considéré comme une suite de mouvements simples dont nous avons une idée nette. ainsi, pour se représenter le mouvement d'un point sur une courbe, on se figure ce point comme décri-vant les côtés successifs d'un polygone infinitésimal inscrit à la courbe. — On a donc ce théorème :

23. Le mouvement d'un corps qui tourne d'une manière qcq. sur un point fixe n'est autre chose qu'une rotation de ce corps sur un axe qui passe toujours par le point fixe; mais dont la direction change d'un moment à l'autre, et que, pour cette raison, l'on appelle l'axe Instantané.

Et il en est précisément de cet axe instantané dans la rotation d'un corps comme de la tangente à une courbe

dans le mouvement du point qui la produit décrit.

24. Il faut bien remarquer que cet axe instantané change de position et dans le corps et dans l'espace tout-à-la-fois. Car, comme il est à la fois immobile dans le corps et dans l'espace pendant la durée d'un instant, et, qu'au bout de cet instant, on le suppose dans une autre position, il est clair qu'il ne peut plus être au même lieu ni dans l'espace absolu ni dans l'intérieur du corps, et l'on peut même ajouter que l'angle qu'il décrit dans l'espace et qui fait son mouvemt. absolu est le même qu'il décrit dans l'intérieur du corps et qui fait son mouvement relatif.

Lors donc que nous voyons un corps tourner sur un axe invariable de position dans le corps, mais variable de position dans l'espace, nous devons conclure que cet axe n'est point l'axe instantané autour duquel se fait réellement la rotation: car l'axe instantané ne pourrait rester immobile dans le corps sans rester aussi immobile dans l'espace.

VIII.

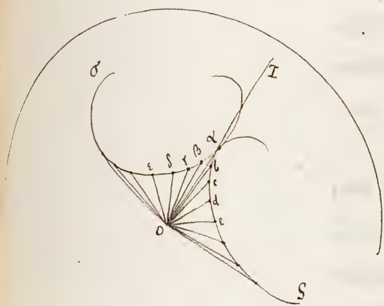
Image sensible de cette Rotation.

Quoique nous ayons déjà une idée beaucoup plus nette du mouvement d'un corps autour d'un point, nous allons tâcher d'éclaircir encore cette idée.

25. L'axe instantané, passant toujours par le point fixe, ne peut décrire dans l'espace qu'une certaine surface conique dont le sommet est en ce point, et de même il est évident qu'il ne peut décrire dans l'intérieur du corps

est une autre surface conique de même sommet.

Soit donc O ce commun sommet, et OI l'axe ins-tantané dans la position actuelle que l'on considère, et concevons du centre O et d'un rayon qcq. une sphère décrite qui coupe les deux surfaces coniques suivant deux courbes qui seront comme les bases de ces deux sur-faces. De ces deux courbes, la première σ est fixe dans l'espace, la seconde s est fixe dans le corps, et par conséquent mobile avec lui dans l'Espace.



Divisons le temps t en instants dt, et la courbe σ en parties correspondantes à ces instants, puis joignons les points de division par des arcs de grands cercles, et, au lieu de la courbe, considérons le polygone sphérique infinitésimal αβγδε..

Divisons l'autre courbe en parties respectivement égales ab = αβ, bc = βγ, etc. au premier instant dt, le corps, qui tourne sur OI, amène le point b du corps sur le point β de l'espace : dans l'instant suivant, le corps qui tourne sur Oβ, amène le point c sur le point γ, et ainsi de suite, d'un instant à l'autre : de sorte que la courbe s qui sert de base au cône mobile vient appliquer l'un après l'autre tous ses divers éléments sur les divers éléments respectivement égaux de l'autre courbe σ qui sert de base à la surface du cône fixe. D'où je conclus que le mouvement du corps pourrait

être produit par le cône mobile qui roulerait sans glisser sur le cône fixe dont il s'agit.

26. Nous avons donc ce nouveau théorème

De quelque manière qu'un corps se meuve en tournant autour d'un point fixe, ce mouvement ne peut être autre chose que celui d'un certain cône, dont le sommet est en ce point, et qui roule actuellement, sans glisser, sur la surface d'un autre cône fixe de même sommet.

Je veux dire que le cône mobile, considéré comme attaché au corps et l'entraînant avec soi, s'il vient à rouler sur l'autre cône qui est fixe dans l'espace absolu, fera décrire à ce corps le mouvement précis dont il est animé ; que la ligne de contact de ces deux cônes sera, à chaque instant, l'axe autour duquel le corps tourne dans cet instant, ou ce qu'on appelle l'axe instantané. D'où l'on voit comment cet axe est à la fois mobile dans le corps et dans l'espace absolu, décrivant dans l'espace la surface du cône fixe, et dans l'intérieur du corps la surface du cône mobile dont on vient de parler.

27. Telle est l'idée la plus nette du mouvement d'un corps autour d'un point, de telle sorte que, si l'on imagine tous les cônes possibles qu'on ferait rouler ainsi l'un sur l'autre, on a l'image fidèle de tous les mouvements possibles dont un corps soit capable autour d'un point lorsqu'il peut pirouetter en tous sens autour de ce point. – Et même si le mouvement était discontinu, on remplacerait les cônes par des pyramides de même sommet, et de faces respectivement égales.

Remarque I. 28. Il est bon de remarquer que, dans la démonstration, il était inutile de prendre OI cons.

-tant ; ce qui donnait les courbes tracées par le ~~centre~~ pôle ins-
-tantané : on pouvait faire varier OI suivant une loi q.q. : les surfaces coniques ne changeant pas, la démonstration se ferait toujours de la même manière.

Remarque II. 29. Il faut bien remarquer que, quand nous parlons du mouvement de l'axe instantané, nous employons une expression impropre. L'axe instantané change à chaque instant, mais il ne se meut pas. A la vérité, en se figurant l'ensemble de toutes les lignes qui serviront d'axes instantanés, menées d'avance, les unes dans le corps, les autres dans l'espace, et leur donnant le nom commun d'axe instantané, on peut dire naturellement : la surface décrite par cet axe. Et de même au lieu d'appeler $d\varphi$ l'angle compris entre deux génératrices consécutives de cette surface, on peut dire l'angle décrit en un instant dt par l'axe instantané, et nommer aussi le rapport $\frac{d\varphi}{dt}$ la vitesse angulaire avec laquelle cet axe trace en même temps les deux surfaces coniques en question. C'est dans le même sens qu'on nomme le rapport $\frac{ds}{dt}$, ou $\frac{d\sigma}{dt}$ qui lui est égal, la vitesse avec laquelle le pôle instantané I se meut le long des courbes s et σ, quoique le pôle instantané n'ait par lui-même point de vitesse.

IX.

Des différentes choses que l'on peut naturellement considérer dans l'étude du mouvement d'un corps autour d'un point, et de la dépendance mutuelle de ces choses-là.

30. Si les deux courbes s et σ qui servent de bases

aux deux surfaces coniques sont données avec la vitesse an-gulaire θ de rotation autour de l'axe instantané OI, il est évident que le mouvement du corps sera entièrement déter-miné.

Si, la vitesse angulaire θ étant toujours donnée, une seule de ces courbes est donnée avec la vitesse du pôle qui la décrit, l'autre courbe sera nécessairement donnée.

Supposons par exemple que la courbe fixe σ soit donnée avec la vitesse $\frac{d\sigma}{dt}$ du pôle instantané I le long de cette courbe. Comme le corps tourne sur OI avec une vitesse angulaire θ aussi donnée, il est clair que le point du corps qui, au bout de l'instant dt, doit venir tomber sur la courbe fixe σ pour y être à son tour le pôle instantané, est un point déjà déterminé dans le corps, et il en est de même des autres points du corps que les rotations successives doivent amener l'un après l'autre, comme pôles, sur la courbe fixe et donnée σ. D'où l'on voit que l'autre courbe s, qui marque la route du pôle dans l'intérieur du corps, est entièrement déterminée.

Et réciproquement si, au lieu de la courbe σ, on connaît la courbe s avec la vitesse $\frac{ds}{dt}$ et la rotation θ, on verra de même que la courbe fixe σ se trouvera entière-ment déterminée dans l'espace.

31. En général, dans l'étude du mouvement d'un corps autour d'un point, les quantités simples à considérer sont la vitesse angulaire θ de rotation autour de l'axe

instantané ; la vitesse angulaire ω avec laquelle cet axe trace les deux surfaces coniques S et Σ qu'il décrit en même temps l'une dans l'intérieur du corps, l'autre dans l'espace absolu, les rayons de courbure r et ρ de ces deux surfaces, les mouvements angulaires p et π du pôle, l'un autour de l'axe OP du cône osculateur de la surface mobile S, et l'autre autour de l'axe $O\Pi$ du cône osculateur de la surface fixe Σ. Et si, de ces différentes choses, trois quelconques sont connues, on peut dire que les autres le sont aussi, et que le mouvement du corps est entièrement déterminé.

Pour nous faire une idée nette de ces relations, prenons sur l'axe instantané une longueur $OI = 1$, et remplaçons les courbes s et σ par des polygônes sphériques d'un nombre infini de côtés. — Pendant l'instant dt, où le pôle reste immobile en I, le côté ds du polygône sphérique mobile s décrit pour venir se coucher sur le côté égal $d\sigma$ du polygône fixe σ un angle égal à la somme ou à la différence (suivant la disposition des courbes) des angles de contingence des deux courbes, de et $d\varepsilon$. La vitesse angulaire θ de rotation autour de l'axe instantané OI est donc

$$\theta = \frac{de \pm d\varepsilon}{dt}$$

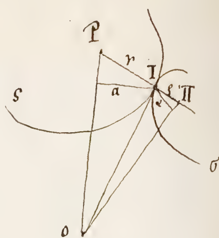
ou

$$\theta = \frac{1}{r}\,\frac{ds}{dt} \pm \frac{1}{\rho}\,\frac{d\sigma}{dt}$$

Mais $\frac{ds}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$, et c'est ce rapport que nous avons

appelé ω. Donc

$$\theta = \omega\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\rho}\right)$$



32. Si l'on suppose menés les deux rayons de courbure $IP = r$, $I\Pi = \rho$, et qu'on joigne OP et $O\Pi$, on aura les axes des deux cônes droits et circulaires osculateurs de ces deux surfaces, et les deux perpendiculaires abaissées du pôle I sur ces deux axes OP et OΠ seront les rayons a et α des cercles qui servent de bases à ces cônes osculateurs. Or on a par la figure

$$r^2 = \frac{a^2}{1-a^2} \qquad \rho^2 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

d'où

$$\theta = \frac{\omega}{a}\sqrt{1-a^2} \pm \frac{\omega}{\alpha}\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Mais ω étant la vitesse angulaire de l'axe instantané sur la surface du cône, il est clair que $\frac{\omega}{a}$ est la vitesse angulaire de la projection de cet axe OI sur la base, et par conséquent c'est le mouvement angulaire du pôle I autour de l'axe OP de ce cône, et de même $\frac{\omega}{\alpha}$ est son mouvement angulaire autour de l'axe OΠ de l'autre cône. Donc on désigne ces mouvements angulaires par p et π. on a d'abord

$$p : \pi :: \alpha : a$$

et ensuite

$$\theta = p\sqrt{1-a^2} \pm \pi\sqrt{1-\alpha^2}$$

D'ailleurs, soient x et ξ les angles de OI avec les axes OP et OΠ : on aura

$$a = \sin x \qquad \alpha = \sin \xi$$

$$\sqrt{1-a^2} = \cos x \qquad \sqrt{1-z^2} = \cos \xi$$

Donc les relations précédentes équivalent à cette suite de rapports égaux :

$$p : \pi : \theta :: \sin\xi : \sin x : \sin(x+\xi)$$

Donc p et π sont les deux côtés d'un parallélogramme dont θ est la diagonale.

33. On voit donc que toutes ces quantités sont liées entre elles et peuvent se trouver quand on en connaît trois en fonction du temps.

Si ces trois quantités sont constantes, toutes les autres le sont aussi, et le mouvement du corps est celui d'un cône droit à base circulaire qui tourne uniformément sur un cône droit également et circulaire.

Ainsi la terre tourne en un jour sur son axe OI, tandis que cet axe décrit en sens contraire un cône droit autour de l'axe $O\Pi$ de l'Ecliptique, sous un angle ξ de 26° 8' et avec une vitesse angulaire π de 42 tierces centésimales par jour. On connaît donc la rotation θ autour de l'axe instantané, le cône fixe Σ que cet axe décrit dans l'espace et la vitesse angulaire π qu'il a dans ce mouvement. On peut donc déterminer dans la terre le cône S qui, roulant sur le premier Σ, et en dedans de sa surface, ferait décrire à la terre le mouvement précis qu'on y observe, car on a

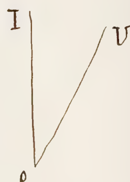
$$\operatorname{Tg} x = \frac{\pi \sin \xi}{\theta + \pi \cos \xi} = \frac{42''' . \sin 26° . 8'}{400° + 42''' \cos 26° . 8'}$$

en prenant le Jour pour unité de temps : d'où l'on conclut 1^m,684 de longueur pour la circonférence base du cône S.

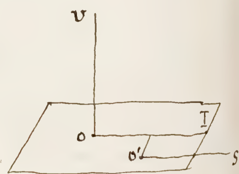
X.

Idée du Mouvement le plus Général que puisse avoir un corps dans l'Espace absolu.

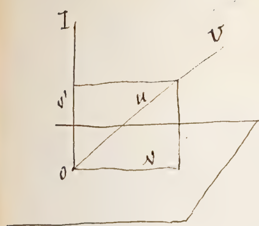
34. Considérons un point qcq. o du corps et sa vitesse u dans l'espace. Il est clair qu'on ramène le mouvement du corps à deux mouvements : 1°. une translation, 2°. une rotation θ autour d'un certain axe OI passant par le point o.



S'il arrivait que la direction OU de la translation u fût perpendiculaire à l'axe OI de la rotation θ, tout le mouvement se réduirait à une simple rotation autour d'un axe o'S parallèle à OI. En effet dans le plan mené par OI perpendiculairement à OU, prenons un point o' du côté de l'axe OI où la vitesse de rotation des molécules est de sens contraire à leur vitesse de translation, et à une distance de cet axe égale à $\frac{u}{\theta} = x$. La vitesse totale de o' sera $x\theta - u = 0$, et il en sera de même pour tous les points de o'S parallèle à OI. Donc, dans ce cas particulier, le mouvement se réduit à une rotation simple autour de l'axe o'S, qu'on appelle l'axe spontané de rotation.



Actuellement, si OU n'est pas perp. à OI, décomposons la vitesse u en deux autres : l'une v



perp. à OI, l'autre v' dirigée suivant OI. La vitesse v combinée avec la rotation θ donne une rotation autour d'un certain axe parallèle à OI, et la seconde v' transportera le corps dans la direction de cet axe. Donc dans le cas le plus général,

Tout le mouvement d'un corps se réduit à tourner sur un certain axe et à glisser en même temps le long de cet axe : de sorte que ce mouvement est exactement le même que celui d'une vis qui tourne dans son écrou.

Seulement, d'un instant à l'autre, les pas des vis changent aussi bien que leurs axes.

35. Ceci donne une idée très claire du mouvement d'un corps.

Quelquefois le pas de la vis est nul, et il y a un axe spontané de rotation : mais en général cela n'a pas lieu. Mais il y a toujours ce que l'on pourrait nommer un axe spontané glissant, c.à.d. qu'il y a toujours dans le corps une ligne droite dont tous les points n'ont d'autre mouvement qu'une translation le long de cette droite.

36. Telle est donc la nature du mouvement des corps solides quand il y a un point fixe, c'est un certain cône mobile qui se meut sur un cône fixe de même sommet, ces cônes peuvent d'ailleurs se réduire à des plans, à des cylindres et à des droites. Enfin, si un corps se meut d'une manière qcq. dans l'espace, on peut le voir à chaque instant comme une certaine

vis qui tourne dans son écrou. Et comme c'est aussi à ce mouvement que peuvent se réduire des rotations quelconques, on peut conclure que, par de simples rotations sur différents axes, on peut donner à un corps le mouvement le plus général dont il soit susceptible.

Chapitre deuxième.

Des forces capables d'un mouvement donné.

---

37. Après avoir considéré le mouvement des corps en lui-même, il faut chercher les forces capables de le produire, afin de voir réciproquement quel est le mouvement que doit prendre un corps en vertu de forces quelconques données, ce qui est le problème général de la dynamique.

On appelle force toute cause capable d'imprimer un mouvement rectiligne et uniforme à un point matériel. La direction et le sens du mouvement de ce point sont la direction et le sens de cette force; et la grandeur de cette force a pour mesure le produit de la masse par la vitesse imprimée.

38. Ceci posé, quel que soit le mouvement d'un corps dans l'espace, il y a toujours des forces qui, étant appliquées à ce corps supposé en repos, sont capables d'y produire le mouvement qu'on y observe. En effet, dans

ce mouvement, chaque molécule dm du corps ayant dans l'espace une vitesse u, il est évident que cette molécule pourrait être regardée comme en repos, mais animée tout-à-coup par une force udm qui produirait sa vitesse. Donc, si l'on considère l'infinité des forces semblables udm appliquées à toutes les molécules respectives du corps on aura certainement des forces capables de produire sur le corps le mouvement donné. Donc si l'on imagine que, par les lois statiques de la composition des forces, on ait réduit toutes ces forces élémentaires udm à d'autres P, Q, R, etc. on aura un autre système de forces également capables du mouvement donné.

39. Mais il y a une différence essentielle à remarquer entre le système des forces udm appliquées à tous les éléments du corps, et les forces P, Q, etc. auxquelles on les aurait réduites par la composition.

Cette différence est relative à l'état initial du corps.

Quand on applique les forces élémentaires udm, chacune produit sur la molécule correspondante le mouvement donné, même quand les diverses molécules ne seraient pas liées. Le mouvement du corps est pour ainsi dire spontané.

Mais si, au lieu des forces udm, on applique les forces P, Q, etc. au système, il faut nécessairement que les molécules soient liées au premier instant, sans

quoi les forces P, Q, etc. n'entraîneraient pas tout le corps.

40. Cette distinction qu'on vient de faire, nulle quant au mouvement produit sur le corps, est essentielle quant à l'état intérieur initial de ce corps. Car il peut être affecté au commencement d'autant de manières différentes qu'on peut lui appliquer de différents systèmes de forces également capables de lui imprimer le même mouvement; mais si l'on ne considère que le mouvement du corps, il est permis de composer les forces élémentaires udm, et de les réduire ainsi à d'autres, comme par exemple à une seule force et à seul couple, dont l'ensemble sera également capable du mouvement donné.

I.

Des forces capables d'un pur Mouvement de Translation.

41. Si un corps n'a dans l'espace qu'un pur mouvement de translation, de sorte que toutes les molécules s'avancent dans le même sens avec la même vitesse et suivant des droites parallèles, il est clair que toutes les forces élémentaires udm dont ces molécules sont animées sont aussi parallèles, de même sens et proportionnelles aux masses respectives de ces molécules. De telles forces sont toujours réductibles à une seule R parallèle et de même sens, égale à leur somme $\int udm$, et passant par le centre de gravité du corps.

Donc réciproquement :

Si une force qcq. R est appliquée au centre de Gravité d'un corps solide, comme elle pourra toujours se décomposer en forces parallèles et de même sens, appliquées aux molécules de ce corps, et proportionnelles aux masses de ces molécules, l'effet de cette force R sera de transporter toutes les parties du corps suivant sa propre direction, et avec une commune vitesse $u = \frac{R}{m}$, c.à.d. égale à la grandeur de cette force divisée par la masse entière m du corps dont il s'agit : — ce qui était pour ainsi dire évident.

42. Si cette force R variait de grandeur et de direction à chaque instant, le mouvement du corps n'en serait pas moins toujours un pur mouvement de translation : tous les points de ce corps décriraient des lignes courbes, mais tous les éléments de ces courbes décrits dans le même temps seraient égaux et parallèles.

II.

Des forces capables d'une pure Rotation sur un axe donné.

43. Supposons qu'un corps tourne dans l'instant que l'on considère autour d'un axe donné qcq. OZ, avec une vitesse angulaire θ. Il est clair que, dans ce mouvement, une molécule qcq. dm prise à la distance r de cet axe OZ, a une vitesse θr dirigée suivant la tangente du cercle que cette molécule tend à décrire. ainsi la force qui l'anime a la même direction, et elle est exprimée par θr dm.

Toutes les molécules du corps sont donc animées par des forces semblables $\theta r\,dm$ proportionnelles à leur masse dm et à leur distance r de l'axe de rotation, et suivant des directions qui sont à la fois perp. à ces distances et à la direction de l'axe donné : et il s'agit de voir comment on peut réduire toutes ces forces élémentaires à d'autres d'un effet équivalent, c.àd. également capables de la rotation θ du corps autour de l'axe libre et donné OZ.

Réduction de ces Forces.

44. Menons par un point O de l'axe deux autres droites OX, OY perp. à OZ et perp. entre elles, et soient x, y, z les coordonnées de la molécule dm par rapport à ces axes. Décomposons la force $\theta r\,dm$ en trois autres X, Y, Z. on aura évidemment
$X = \theta y\,dm$, $Y = -\theta x\,dm$, $Z = 0$.

Si l'on transporte ces forces parallèlement à elles-mêmes au point o, il en provient d'abord deux forces :

$$X = \theta y\,dm$$
$$Y = -\theta x\,dm$$

appliquées en O suivant les axes OX et OY, ensuite trois couples L, M, N. autour des trois axes respectifs des x, y et z, et dont les moments sont $(Yz - Zy)$, $(Zx - Xz)$, $(Xy - Yx)$, ce qui donne

$$L = -\theta xz\,dm \quad M = -\theta yz\,dm \quad N = \theta r^2\,dm$$

Donc en faisant pour toutes les forces la même transformation, toutes les forces se réduiront aux forces et aux couples suivants :

1°. Deux forces $X = \theta \int y\,dm$, $Y = \theta \int x\,dm$, l'une suivant ox, l'autre suivant oy. La résultante P sera perp. à oz et sa valeur sera

$$P = \theta \sqrt{\left(\int x\,dm\right)^2 + \left(\int y\,dm\right)^2}$$

ou, en nommant D la perpendiculaire abaissée du centre de gravité du corps sur l'axe oz :

$$P = \theta m D$$

2°. Deux couples $L = -\theta \int xz\,dm$, $M = -\theta \int yz\,dm$, autour des deux axes ox et oy, et dont le couple résultant K passant par oz est

$$K = \theta \sqrt{\left(\int xz\,dm\right)^2 + \left(\int yz\,dm\right)^2}$$

3°. Enfin le couple N dont le plan est perpendiculaire à l'axe oz

$$N = \theta \int r^2\,dm$$

ainsi, en prenant les cinq intégrales $\int x\,dm$, $\int y\,dm$, $\int xz\,dm$, $\int yz\,dm$, $\int (x^2+y^2)\,dm$ pour toute la masse du corps, on déterminera complètement la force P, le couple K et le couple N, dont l'ensemble est capable de la rotation θ autour de l'axe oz.

Corollaire I. 45. Si cet axe oz passe par

le centre de gravité du corps, on aura

$$\int x\,dm = 0 \qquad \int y\,dm = 0$$

d'où

$$P = 0$$

et toutes les forces seront réduites aux deux couples K et N, ou, si l'on veut, à leur résultant,

$$G = \sqrt{K^2 + N^2}$$

d'où je conclus que

Les forces capables de faire tourner un corps sur un axe passant par le centre de gravité sont toujours réductibles à un couple.

Remarquons que ce couple n'est pas perp. à l'axe de rotation : mais qu'il fait avec cet axe un angle dont le cosinus est $\dfrac{K}{\sqrt{K^2+N^2}}$, et n'est pas nul en général.

Corollaire II. 46. Mais s'il arrive que cet axe oz soit un des axes principaux du corps, on aura

$$\int xz\,dm = 0 \qquad \int yz\,dm = 0$$

et alors toutes les forces se réduiront au couple N perp. à l'axe de rotation.

D'où je conclus que

Les forces capables de faire tourner un corps sur un de ses axes principaux sont toujours réductibles à un couple perp. à cet axe principal.

Et réciproquement un couple qcq. N perp. à l'un des axes principaux est toujours décomposable en forces

élémentaires $\theta r\,dm$ capables de faire tourner le corps sur cet axe avec une vitesse angulaire $\theta = N : \int r^2 dm$. on a donc le Théorème.

Si un couple est appliqué sur un corps libre dans un plan perp. à l'un de ses axes principaux, son effet sera de faire tourner le corps sur cet axe lui-même avec une vitesse angulaire égale au moment de ce couple, divisé par le moment d'inertie du corps autour de cet axe principal.

Corollaire III. 47. Il est alors facile de trouver l'effet d'un couple qq. G appliqué à un corps. on le décompose en trois couples L, M, N suivant les trois axes principaux, qui produiront les Rotations

$$p = \frac{L}{A} \qquad q = \frac{M}{B} \qquad r = \frac{N}{C}$$

A, B, C étant les moments d'inertie par rapport à ces trois axes. Ces Rotations se composent en une seule θ, qui est la Rotation produite par le couple G.

Corollaire Général :

Des forces capables d'un mouvement quelconque ; et Réciproquement, du mouvement que prend un corps en vertu de forces qq. données.

48. D'après ce que nous venons de dire, quel que soit un mouvement donné, on peut toujours le concevoir décomposé en deux, l'un qui consiste dans une pure translation égale et parallèle au mouvement du centre de Gravité du corps, et l'autre dans une simple Rotation autour d'un axe passant par le même centre.

on n'aura donc qu'à prendre la force R capable du premier mouvement, et le couple G capable du second, et le problème sera résolu.

49. Réciproquement, quelles que soient les forces appliquées à un corps, on peut toujours les décomposer en une force R passant par le centre de gravité, et un couple G. La force R tend à imprimer aux molécules une vitesse $u = \frac{R}{m}$, et le couple G tend à faire tourner le corps autour d'un certain axe OI passant par le centre de gravité et qu'on déterminera comme on l'a dit ci-dessus.

Remarque. 50. Chaque molécule dm est donc animée par deux forces, l'une udm parallèle à R, l'autre θrdm perp. à la fois à l'axe OI et à sa distance r de cet axe. Donc cette molécule décrit, à chaque instant dt, la diagonale du parallélogramme construit sur les deux lignes infiniment petites udt et θrdt, qui représentent les espaces dus à ces forces.

D'ailleurs il est évident que tous ces mouvements des molécules du corps seront possibles : car les mouvements composants le sont évidemment. Et si l'on veut se représenter dans l'espace toutes les petites diagonales que suivent à la fois toutes les molécules du corps, on a vu que ce sont de petits arcs d'hélices sur des cylindres concentriques à l'axe spontané glissant O'S.

III.

Des forces Centrifuges qui naissent de la Rotation.

51. Nous avons considéré plus haut les forces finies $\theta r dm$. dont toutes les molécules d'un corps sont animées quand ce corps tourne avec une vitesse angulaire θ autour d'un axe donné OZ.

Mais de cette Rotation même il naît à chaque instant pour chaque molécule dm une force infiniment petite qui tend à éloigner cette molécule du centre de sa Rotation, et qu'on nomme ainsi la force centrifuge.

52. Pour se faire une idée nette de cette force, il faut d'abord remarquer qu'une molécule libre dm animée de la seule force $u dm$ suivant la tangente d'un cercle, ne peut en toute rigueur décrire un arc de cercle quelque petit qu'on le suppose, à moins qu'elle ne soit à chaque instant attirée vers le centre par une certaine force qui la retiendrait sur une circonférence, sans quoi ~~la~~ cette molécule s'en irait par la tangente avec la vitesse u qui lui est imprimée. Cette force, qu'on nomme Centripète, est du même genre que la Gravité, et elle se mesure de la même manière, c.à.d. par la vitesse qu'elle ferait acquérir au mobile dans l'unité de temps, si elle agissait toujours également sur lui, je veux dire si, à chacun des instants égaux, elle ajoutait

au mobile un égal degré de vitesse. Dans un mouvement de cette nature, la vitesse acquise est donc proportionnelle au temps, de sorte qu'on a ft pour la vitesse acquise au bout du temps t, et $\frac{1}{2}ft^2$ pour l'espace dont le mobile serait descendu vers le centre au bout de ce temps t.

Quant à la grandeur f de cette force centripète, elle dépend évidemment de la vitesse u suivant la tangente, et du rayon r du cercle décrit, et il est bien facile de la déterminer. Car, sans l'accession de cette force accélératrice, le point matériel s'en irait en un instant sur la tangente par un espace udt, et se trouverait ainsi éloigné de la circonférence d'une petite distance égale à la partie extérieure e de la sécante menée de ce point par le centre du cercle. Pour que le point reste sur la circonférence, il faut donc que $\frac{1}{2}f\,dt^2$ soit précisément égal à e. Or $e = \frac{u^2 dt^2}{2R+e}$. Donc

$$f = \frac{2u^2}{2R+e} \qquad f = \frac{u^2}{R}$$

en négligeant e qui est infiniment petit par rapport à la quantité finie R.

Ainsi :

La force centripète nécessaire pour qu'un point libre puisse tourner en cercle avec une vitesse u suivant la tangente est exprimée par le carré de cette vitesse ; divisé par le rayon R du cercle qu'il décrit.

, Et il est évident que la même expression s'applique à un mouvement curviligne, en prenant pour r le Rayon du cercle osculateur de la courbe.

Dans notre exemple, $u = \theta r$. on aura donc

$$f = \theta^2 r$$

53. Cela posé, si à chaque force tangentielle $dm\,\theta r$ qui anime chaque molécule du corps, on joignait la force centripète convenable, et que je représente par $-dm\,\theta^2 r\,dt$ (en lui donnant le signe $-$ parce qu'elle tend à diminuer la distance r à l'axe oz), il est manifeste que l'ensemble de ces molécules, et par consé-quent le corps lui-même tournerait autour de l'axe oz avec la vitesse angulaire θ, et cela, quand même les molécules ne seraient pas liées entre elles, et par con-séquent sans que cette rotation pût affecter en rien l'État intérieur du corps.

Dans la question qui nous occupe, chaque molécule dm n'est poussée que par la force tangentielle $dm\,\theta r$ et il n'y a point de force centripète $-dm\,\theta^2 r\,dt$ qui intervienne pour le faire tourner librement autour de l'axe oz. Mais je considère que si cette force $-dm\,\theta^2 r\,dt$ n'y est point, rien n'empêche de la sup-poser, pourvu qu'on en suppose une autre égale et contraire $+dm\,\theta^2 r\,dt$. ainsi, à la seule force d'impulsion $dm\,\theta r$, il est toujours permis de

substituer l'ensemble des trois forces

$$\theta r\, dm \quad - dm\, \theta^2 r\, dt \quad + dm\, \theta^2 r\, dt$$

Mais alors on peut imaginer que, pendant l'instant dt, les deux premières forces sont employées à faire tourner librement la molécule sur un arc de cercle $\theta r\, dt$, tandis que la troisième force $+ dm\, \theta^2 r\, dt$ tire cette même molécule dans le sens où elle tend à l'éloigner du centre, et voilà précisément ce que j'appelle la force centrifuge née de la rotation du corps. Toutes les molécules sont donc tirées à chaque instant par des forces semblables, uniquement dues au mouvement de rotation: forces réelles, qui affectent l'état intérieur du corps par les tensions qu'elles produisent sur les liens, quels qu'ils soient, qui retiennent les molécules.

Réduction des forces centrifuges à une seule force et à un seul couple.

52. Toutes les forces centrifuges qui naissent de la rotation θ étant ainsi représentées par $dm\, \theta^2 r\, dt$, elles ont, au facteur près $\theta\, dt$, la même expression que les forces finies $\theta r\, dm$ dont les molécules sont actuellement animées. Mais, au lieu d'agir suivant les tangentes, elles agissent suivant les rayons des cercles décrits, et elles sont ainsi perpendiculaires à ces premières forces $\theta r\, dm$ et à l'axe donné Oz. Si donc on les réduit de la même manière en les

transportant au même point O, elles donneront pour leur Résultante Π analogue à la Résultante P des premières forces

$$\Pi = \theta^2 \sqrt{\left(\int x\,dm\right)^2 + \left(\int y\,dm\right)^2} = \theta P$$

et pour leur couple Résultant χ analogue au couple Résultant K, et passant de même par Oz :

$$\chi = \theta^2 \sqrt{\left(\int xz\,dm\right)^2 + \left(\int yz\,dm\right)^2} = \theta K$$

et il n'y a point de couple analogue au couple N autour de Oz, puisque les directions des forces centrifuges passent toutes par l'axe Oz lui-même.

55. Telles sont les valeurs de la force accélératrice et du couple accélérateur qui résultent des forces centrifuges. Quant à la position de cette force Π et à celle du couple χ, on les voit presque immédiatement. Car toutes les petites forces centrifuges étant respectivement perpendiculaires et proportionnelles aux forces d'impulsion correspondantes, il en résulte que Π est perp. à P. — Par la même raison, l'axe du couple accélérateur est perp. à celui du couple K, et comme il est perp. à Oz qui est l'axe du couple N, il est aussi perp. à l'axe du couple G, qui est le résultant de N et de K. On peut donc dire que l'axe du couple χ dû aux forces centrifuges est perpendiculaire à la fois sur l'axe de la rotation θ, et sur celui du couple d'impulsion G.

ainsi P et G étant deux lignes qui, partant du point o, représentent l'une la direction et la grandeur de la force P, l'autre l'axe et la grandeur du couple G, dont l'ensemble est P et G est capable de la rotation θ autour de l'axe oz, si l'on nomme i l'inclinaison de G à l'axe de cette rotation θ (ce qui donne $K = G \sin i$), on a, pour la force et le couple accélérateurs π et χ qui naissent des forces centrifuges, ces expressions très-simples

$$\pi = \theta P \qquad \chi = \theta G \sin i$$

π étant à la fois perp. à P et à l'axe θ, et χ étant perp. à la fois à G et au même axe θ.

Remarque. 56. Quant au sens de ces forces et de ces couples, ils sont bien faciles à reconnaître. Car on peut remarquer que si la direction de chaque force centrifuge faisait un quart de révolution dans le sens même où le corps tourne, elle deviendrait de même sens que la force d'impulsion. Donc les deux lignes oπ et oχ qui répondent à la résultante et au couple résultant des forces centrifuges doivent être tellement posées par rapport aux lignes oP et oK qui répondent aux forces d'impulsion, que si oπ et oχ venaient à tourner d'un angle droit dans le sens même de la rotation θ, la ligne oπ viendrait se coucher sur oP, et la ligne oχ sur oK.

Corollaires. — 57. Lorsque l'axe oz de la rotation

passe par le centre de gravité du corps, on a

$$\int x\,dm = 0 \quad \text{et} \quad \int y\,dm = 0 \quad \text{d'où} \quad \Pi = 0$$

et toutes les forces centrifuges se réduisent au couple χ. Si de plus l'axe Oz est un des trois axes principaux du corps, on a

$$\int xz\,dm = 0 \quad \text{et} \quad \int yz\,dm = 0 \quad \text{d'où} \quad \chi = 0$$

et toutes les forces centrifuges se font équilibre.

Et réciproquement, il n'y a qu'un seul axe autour duquel les forces centrifuges nées de la rotation puissent se contrebalancer mutuellement. Car, pour l'équilibre, il faut avoir $\Pi = 0$ et $\chi = 0$. Or Π ne peut être nul que si $\int x\,dm$ et $\int y\,dm$ sont nuls, c.à.d. si l'axe passe par le centre de gravité, et de même χ ne peut être nul que si l'axe Oz est un des axes principaux du corps.

Remarque. 58. On voit par là qu'en Mécanique, on peut chercher les axes principaux d'un corps par deux considérations différentes, mais qui mènent sur-le-champ aux mêmes équations. Car on peut demander, autour de quel axe un corps doit-il tourner pour que les forces actuelles $\theta r\,dm$ qui animent les molécules se réduisent à un couple N perp. à cet axe ? ou bien, autour de quel axe doit-il tourner pour que les forces centrifuges

$\theta^2 r dm$ qui naissent de la rotation se fassent mutuellem.t équilibre ?

En représentant cet axe inconnu par la ligne OZ, on arrive pour la détermination de cet axe à $\int x dm = 0$ et $\int y dm = 0$, ce qui exprime qu'il passe par le centre de gravité, puis $\int xz dm = 0$, $\int yz dm = 0$, ce qui détermine sa direction.

59. Si le corps n'est pas libre et que le point O soit fixe, on a toujours $P = 0$, $\Pi = 0$; il suffit donc d'annuler ou le couple K ou le couple $\chi = \theta K$, ce qui donne encore $\int xz dm = 0$, $\int yz dm = 0$, ce qui montre qu'en un point qcq. O il y a trois axes principaux, parce que nous montrerons que ces éq. déterminent trois axes rectangulaires entre eux. Ces axes jouissent de cette double propriété que, si le corps tourne sur l'un d'eux, toutes les forces appliquées se réduisent à un couple N perp. à cet axe ; et que, si l'on considère les forces centrifuges, elles se font équilibre d'elles-mêmes autour du point fixe O.

60. Dans tous les cas, il suffit de connaître les trois axes principaux qui se croisent au centre de gravité du corps et qu'on nomme les axes naturels de rotation, car une fois qu'on a ces axes et les moments d'inertie qui s'y rapportent, il est très-facile de trouver l'expression du moment d'inertie du corps au.

-tour d'un autre axe mené comme on voudra par le même centre, et de là on peut passer par une autre expression encore plus simple au moment d'inertie relatif à un axe qcq. parallèle à celui-là.

Nous allons maintenant dire quelques mots de la Rotation d'un corps sur un axe fixe, et montrer les percussions et les pressions que cet axe doit subir.

Nous montrerons ensuite que le principe de la Conservation des forces et le principe de la Conservation des couples auraient pu être tirés comme corollaires de la théorie des forces centrifuges.

IV.

Du mouvement d'un corps autour d'un axe fixe.

61. Quelles que soient les forces appliquées à ce corps, on peut toujours les réduire à une seule R appliquée en un point qcq. o de l'axe fixe, et à un seul couple G.

Or il est évident que la force R passant par un point de l'axe fixe y est détruite, et que par conséquent cet axe oz reçoit d'abord au point o une percussion représentée par la force donnée R, ou, si l'on veut, en nommant α l'inclinaison de R à oz, cet axe fixe reçoit deux percussions : l'une $R\cos\alpha$ dans le sens de sa longueur, et l'autre $R\sin\alpha$ dans la direction perpen-

-diculaire.

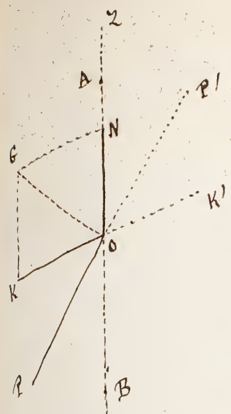
De même, en désignant par ν l'inclinaison de l'axe du couple G au même axe fixe, on décomposera G en deux couples, $N = G \cos\nu$, $N' = G \sin\nu$, le premier perp. à l'axe, le second parallèle : N' est détruit par l'axe fixe, ce qui produit encore une percussion.

Ainsi voilà deux percussions inutiles au mouvement, et qu'il faudrait éviter, si l'on veut faire tourner le corps en ménageant les appuis.

Mais ce n'est pas tout : le couple $N = G \cos\nu$ qui produit le mouvement du corps, quoiqu'il paraisse ne devoir pas frapper l'axe fixe, y produira deux per-cussions du même genre que les premières, c'est ce que nous allons éclaircir.

62. Problème. — On suppose qu'un corps en repos, mobile autour d'un axe fixe OZ, soit frappé par un couple N perp. à cet axe, et l'on demande 1°. la vitesse angulaire θ que doit prendre ce corps ; 2°. la percussion que l'axe fixe doit re-cevoir au premier instant ; 3°. la pression continuelle qu'il aura à supporter, dans le cours du mouvement, en vertu des forces cen-trifuges qui naissent de la rotation.

Soit pris sur l'axe fixe OZ à partir d'un point qcq. O une ligne terminée ON qui représente à la fois l'axe et la grandeur du couple d'impulsion appliqué au corps. — Soient, à partir du même point O, et dans le plan perp. à OZ, deux lignes OP et OK qui



représentent, l'une la force P et l'autre le couple K, qui, combinés avec le couple donné N et seraient capables de faire tourner le corps sur OZ d'une manière sponta-née, c.àd. même en supposant que cet axe fût libre et par conséquent sans lui causer la moindre percussion.

Cela posé, j'imagine qu'on applique au corps les forces P et P', les couples K et K', égaux et contraires. Or par hypothèse les couples N, K et la force P seraient capables de faire tourner le corps sur l'axe OZ avec une vitesse angulaire $\theta = \dfrac{N}{\int r^2 dm}$, sans causer à cet axe la moindre percussion. Donc 1°. le corps prendra cette ro-tation θ. Car la force et le couple restants P' et K' sont détruits par l'axe fixe. 2°. cet axe ressentira deux percussions représentées l'une par la force P', et l'autre par le couple K', dont le plan passe par le même axe, et l'on aura pour ces percussions

$$P' = -P = -\theta\sqrt{\left(\int x\,dm\right)^2 + \left(\int y\,dm\right)^2}$$

$$K' = -K = -\theta\sqrt{\left(\int xz\,dm\right)^2 + \left(\int yz\,dm\right)^2}$$

ce qu'il fallait trouver.

63. Si l'axe OZ était simplement retenu par deux points A et B, et qu'on voulût avoir les percussions ressenties par ces points, il suffirait de décomposer la force P' en deux autres parallèles appliquées en A et B: puis on amènerait le couple K' à avoir AB pour

bras de levier, et l'on composerait alors en une seule les forces appliquées en A et, les puis les forces appliquées en B.

64. Il est évident que les percussions dont il s'agit n'augment qu'au premier instant : car, une fois P' et K' détruits, N, P, K produisent spontanément la rotation sur oz. Par suite la résistance de cet axe n'a plus rien à détruire, il n'y a pas de percussions.

On voit par là que si l'on veut ménager le plus possible l'axe de rotation sans regarder à la quantité de force qu'on emploiera, il faudra appliquer au système la force P et l'ensemble des couples N et K, ou leur couple résultant G, et l'on peut considérer alors la force P et le couple K comme employés à soutenir l'axe tandis que le couple N produit la rotation.

Mais si au contraire on veut ménager la dépense de forces, il faut appliquer le seul couple N, et alors l'axe reçoit deux percussions, −P et −K, qu'il est obligé de détruire.

65. après la destruction du couple K' et de la force P' par l'axe fixe, le corps tend à tourner librement sur l'axe avec la vitesse θ. Mais de cette rotation naissent alors les forces centrifuges $\theta^2 r dm$ dont il faut étudier l'effet. Or il est évident que toutes ces forces étant dirigées vers l'axe fixe, y seront détruites à chaque instant. Donc la rotation du corps sera uniforme. De plus l'axe aura à supporter

dans tout le mouvement les pressions dues aux forces centrifuges ; or les forces centrifuges sont réductibles à une force Π et à un couple χ :

$$\left\{\begin{array}{l} \Pi = \theta P = \theta^2 \sqrt{(\int x dm)^2 + (\int y dm)^2} \\ \chi = \theta K = \theta^2 \sqrt{(\int xz dm)^2 + (\int yz dm)^2} \end{array}\right.$$

desorte que l'axe est chargé à chaque instant d'une pression Πdt appliquée en O, et d'un couple χdt passant continuellement par cet axe.

Remarque. Dans le mouvement que nous venons de considérer, il est clair que la force P et le couple G restent fixes dans le corps et tournent avec l'axe.

Si tout-à-coup cet axe devenait libre, et que le corps fut abandonné à lui-même, on sait, d'après les principes généraux de la dynamique, que P et G seraient également conservés de grandeur et de position non plus dans l'intérieur du corps, mais dans l'espace absolu. Or nous allons faire voir que ces principes que nous alors l'on peut nommer la conservation des forces et la conservation des couples sont de simples corollaires de la théorie des forces centrifuges.

V.

Conservation des forces et conservation des couples dans le mouvement d'un corps libre.

De l'analyse exacte des forces centrifuges, on peut

tirer ces deux belles conséquences : c'est que les forces centrifuges qui naissent du mouvement d'un corps ne peuvent jamais altérer ni la grandeur ni la direction des forces primitives d'impulsion qui ont mis le corps en mouvement. Je veux dire que si, à une époque qcq. on vient à chercher la résultante et le couple résultant des forces finies qui animent le corps à cette époque, on retrouvera la même force et le même couple situés dans les mêmes lieux de l'espace. Ces propositions ne sont il est vrai qu'un corollaire de ce principe, ou de cette loi générale de la dynamique, par laquelle les forces qui animent toutes les molécules d'un système qcq. variable ou non donnent toujours relativement à un même point de l'espace la même résultante R et le même couple résultant G, pourvu que le système soit abandonné à lui-même, c'àd. considéré comme libre de tout obstacle et de toute force accélératrice étrangère. Ce principe général a même lieu, comme on le sait, lorsqu'il y a, entre les molécules du système, des forces qcq. d'attraction, pourvu que ces attractions soient réciproques de l'une à l'autre. Cette conservation a encore lieu, mais pour le couple G seulement, dans le cas particulier de forces accélératrices étrangères tendant toutes vers un même point fixe de l'espace, en prenant ce point fixe pour le centre auquel on rapporte tous les moments du système. Car toutes ces forces accélé-

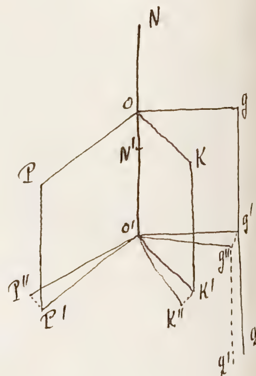
-lératrices ne donnent que des couples nuls relativement à ce point, et le couple résultant G est encore conservé. Tous ces résultats sont démontrés dans le premier mé-moire qui se trouve à la suite des Eléments de Statique.

Dans notre exemple d'un corps solide libre, qui a reçu des impulsions quelconques et qui demeure ensuite aban-donné à lui-même, il paraît donc évident que la conservation de la force R et du couple G d'impulsion ne peuvent manquer d'avoir lieu. Car on ne suppose au-cune force accélératrice qui vienne de l'extérieur, et si l'on y considère des forces centrifuges, ce ne sont en quelque sorte que des forces passives provenant de la liaison mutuelle des molécules, et il est assez clair que de telles forces ne peuvent en rien altérer ni la résultante ni le couple résultant du système. Cependant, comme ces forces centrifuges ne se font point équilibre entre elles sur le corps, il reste ici une certaine obscurité sur la conservation de la force R, et du couple G, puisqu'il subit à chaque instant dt une force $\pi\, dt$ et un couple $\chi\, dt$ qui ne sont point nuls d'eux-mê-mes. Il n'est donc pas inutile de donner quelques détails à ce sujet. Et cela même nous paraît d'autant plus curieux à examiner que non seulement ces forces centrifuges ne troublent ni R ni G, mais qu'elles sont même nécessaires à leur conservation, de sorte que si

à chaque instant, on venait à détruire la force $\pi\,dt$ et le couple $\chi\,dt$, R et G ne se conserveraient plus dans l'espace absolu.

Démonstration. — Quel que soit le mouvement d'un corps, nous avons vu que ce mouvement peut être considéré à chaque instant dt, comme composé d'une rotation θ autour d'un certain axe déterminé ON et d'une translation u parallèle à cet axe que nous avons nommé l'axe spontané glissant.

Soient donc P, K, N la force et les deux couples capables de cette rotation θ sur l'axe ON et Q la force qui, appliquée au centre de gravité g, est capable de la translation u suivant la direction du même axe. En nommant m la masse du corps et faisant $go = a$ on aura :



$$P = ma\theta \qquad Q = mu$$

Cela posé, au bout d'un instant dt le corps sera descendu le long de ON d'une quantité $OO' = u\,dt$ et il aura tourné autour de ON d'un angle $\theta\,dt$. alors, si le corps a entraîné avec lui les lignes OP, OK, Og, ON, elles auront pris finalement les positions O'P'', O'K'', O'g'', O'N', et l'on aura

$$P'P'' = P\theta\,dt \quad K'K'' = K\theta\,dt \quad g'g'' = a\theta\,dt$$

Mais au bout de cet instant, il sera provenu, des forces centrifuges ; 1°. une force $\pi\,dt = P\theta\,dt$ perp.

à P' et qui, composée avec P'', ramènera cette force en P'' à sa place in O'P' ; 2°. un couple $\chi dt = K\theta dt$ perp. à K', et qui, composé avec K'', ramènera ce couple à sa place en O'K'. Donc, au bout d'un instant, les forces et les couples qui animent le corps seront représentées par les lignes O'P', O'K', O'N' et g''Q'. Or je dis que cet ensemble de couples et de forces est exactement le même que celui qui a été considéré au commencement, c. à d. qu'il peut être actuellement représenté par les mêmes lignes OP, OK, ON, gQ situées dans les mêmes lieux de l'espace absolu.

Et d'abord la chose est évidente pour les deux couples représentés par les lignes O'K', O'N' : car, suivant la propriété des couples, il est indifférent qu'ils soient représentés par ces deux lignes ou par les deux lignes OK et ON qui leur sont respectivement égales et parallèles. Restent donc les deux forces P' et Q' appliquées l'une en O', l'autre en g'', qu'il faut montrer être réductibles aux deux forces respectivement égales et parallèles P et Q appliquées en O et en G. Or P' peut être transportée parallèlement à elle-même de O' en O pourvu qu'on ajoute le couple (P, −P) appliqué sur $OO' = udt$. De même Q peut être transportée de g'' en g', pourvu qu'on ajoute le couple (Q, −Q) au bras de levier $g'g'' = a\theta dt$. Mais ici il est clair que ces deux couples sont égaux et de sens

contraire : car leurs moments sont $ma\theta \times udt = P.oo'$ et $mu \times a\theta dt = Q \cdot g'g''$. Donc les couples $(P, -P)$, $(Q, -Q)$ se détruisent, et les deux forces P' et Q' sont ramenées aux deux forces P et Q.

Donc le système de forces et de couples qui animait le corps au premier instant est le même que celui qui l'anime au second. Donc cette conservation des forces et des couples a lieu dans toute la suite du temps.

On peut même voir comment la chose se passe d'un moment à l'autre. Car, au bout d'un instant, le corps ayant changé de position dans l'espace, et les forces ayant gardé la leur, le corps ne s'y présente plus de la même manière, et son mouvement va changer, c.à.d. qu'il va se faire autour de quelque autre axe spontané glissant on. Mais comme ce mouvement sera dû au système (P, K, N, Q), ce système est nécessairement réductible à un système semblable (p, k, n, q) capable de ce mouvement autour du nouvel axe on dont il s'agit. Or, d'après la démonstration précédente, ce nouveau système se conserve pendant un instant. Donc, puisqu'il est réductible au premier (P, K, N, Q), celui-ci se conserve de même, c.à.d. qu'il peut représenter les forces et les couples qui animent le corps, non seulement au bout du premier, mais encore au bout du second instant, et ainsi de suite à l'infini. D'où l'on voit comment cette conservation des forces

et des couples doit s'étendre à tout le cours du mouvement.

Et réciproquement, en partant de ce principe, dont la démonstration directe est très-facile, on reconnaîtrait qu'il est nécessaire pour son existence qu'il naisse du mouvement de petites forces réductibles à une force Πdt et à un couple $X dt$, et l'on arriverait par là aux mêmes expressions trouvées directement. Du reste, rien de cela n'est surprenant, car les deux principes sont une conséquence de la loi de l'inertie.

346.

354.

Cours

de Mécanique et de Machines

de

l'Ecole Polytechnique.

1852 - 1853.

Extraits.

M. Maudrif.

1854.

Première Section.

Cinématique

ou

Etude du Mouvement considéré indépendamment de ses causes.

Chapitre I.

Mouvement absolu et vitesses des points et des Systèmes Invariables.

---

§ 1. – Expression du Mouvement d'un point. La vitesse.

Définitions préliminaires. – Mesure du Temps. Durée (idée acquise par expérience). – Instant, initial et final. –

Mouvement. – Trajectoire d'un point. – Direction du mouvement à chaque instant.

Mouvement Uniforme.

Formules: $\frac{e}{e'} = \frac{t}{t'}$, $\frac{e}{t} = \frac{e'}{t'}$, $e = at$

Dans cette dernière, t est un rapport, ou nombre abstrait; a est l'espace parcouru dans l'Unité de Temps. C'est une longueur qui mesure l'Intensité de la Vitesse.

a dépend de l'Unité de Temps, et augmente avec elle. Son expression numérique dépend aussi de l'Unité de longueur.

Unités ordinaires:

1°. la Seconde de Temps $= \frac{1}{86400}$ du Jour moyen (le Jour Sidéral $= 86164^s,1$ ..)

2°. Le Mètre.

Diverses expressions de la Vitesse:

1 lieue de 4 Kilom. par heure $= \frac{10}{9}^m$ par 1^s.

100 pieds anglais par minute $= \frac{1}{60} \cdot 100 \cdot 0^m,3048 = 0^m,508$ par 1^s.

1 noeud (Marins) = 1 mille marin ou $\frac{1}{3}$ de lieue marine ou $\frac{1}{60}$ de Degré Terrestre par heure $= 1851^m,85$ par heure $= 0^m,514$ par 1''. – Idée du Loch et de sa Corde dont les nœuds sont espacés de $\frac{1}{120}$ de mille marin, ou de $15^m,42$, et filent entre les doigts du timonnier pendant 30'' mesurées

par un Sablier.

Équation du Mouvement Uniforme

$$s = s_0 + vt$$

Discussion des signes.

Formule déduite de deux positions connues à deux instants donnés

$$s = s_1 + \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}(t - t_2)$$

Mouvement varié.

Δs étant l'Espace parcouru pendant le Temps Δt qui succède au Temps t, le quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ est la vitesse moyenne durant ce Temps Δt. La limite $\frac{ds}{dt}$ est la vitesse à l'instant qui termine le Temps t.

$$V = \frac{ds}{dt}.$$

Cette formule comprend comme cas particulier celle du mouvement Uniforme.

Moyens Usuels pour observer un mouvement.

1°. au moyen de repères posés d'avance : on observe le Temps employé à parcourir les Intervalles.

2°. on marque sur le chemin parcouru les positions occupées à des Instants choisis, et l'on mesure Ultérieurement les intervalles.

3°. Pour un bateau : — Loch. — Flotteur perdu parcourant, relativement au bateau, une longueur mesurée sur celui-ci pendant un certain Temps.

Expression ou Représentation de la loi du mouvement d'un point sur sa Trajectoire.

Trois moyens principaux.

1°. Un Tableau à deux colonnes dont l'une désigne les

Temps, comptés à partir d'un instant initial, et l'autre les distances à un point origine.

2°. Une formule, ou équation. – Si par ex. le mouvement est uniforme, on a $s = s_0 + vt$.

Si, comme autre exemple, pendant des temps égaux les espaces successivement parcourus sont en progression arithmétique, ces espaces étant les différences premières des distances s comptées à partir d'une origine, on a

$$s = a + bt + ct^2$$

d'où

$$v = b + 2ct$$

et, en posant $a = s_0$, $b = v_0$, $2c = j$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2$$

$$v = v_0 + jt.$$

j est l'accélération constante. – Dans ce cas, le mouvement est dit uniformément varié.

Si, en général, l'espace peut être exprimé en fonction du temps, de l'équation

$$s = F(t)$$

on conclut encore la vitesse

$$v = F'(t)$$

3°. Une courbe dont les coordonnées sont proportionnelles, les unes aux temps, les autres aux chemins parcourus.

Indiquons ici divers modes de représentation graphique du mouvement d'un point. – On en verra bientôt l'utilité pratique.

1er. mode. – Coordonnées parallèles à deux axes concourants.

La courbe est une image très-expressive du mouvement progressif, rétrograde ou alternatif. – Si le mouvement est uniforme, la ligne représentative est droite; la

vitesse est l'accroissement positif ou négatif de l'ordonnée pour une abscisse représentant à l'Echelle l'Unité de Temps. (Diverses positions de la ligne Représentative suivant les signes de s_0 et de v). — Pour un mouvement varié quelconque ; la vitesse, à un Instant Déterminé, est donnée par la Tangente à la courbe Représentative, au point cor-respondant à cet Instant. Si l'inclinaison est positive, selon que la courbe est convexe ou concave vers les ordonnées négatives, le mouvement est accéléré ou Retardé. Si l'inclinaison est négative, c'est le contraire. — Signi-fication des points d'inflexion, et de ceux où l'in-clinaison est nulle. Distinction entre la vitesse instantanément nulle et le Repos. Exemple : Discussion du mouvement représenté par la courbe dont l'Equat. est $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2$; Diverses positions de la courbe suivant les Signes des Constantes.

2e. Mode — Coordonnées polaires. — Les accroissements des Rayons vecteurs de la Courbe sont proportionnels à ceux des Distances s, et leurs angles sont prop. aux accrois-sements du Temps. — Le mouvement Uniforme est alors représenté par une Spirale d'archimède, et la vitesse est l'accroissement du Rayon vecteur pour un accroissement d'angle Représentant l'unité de Temps.

Dans le cas d'un mouvement varié, la vitesse qui correspond au point M s'obtient par le Tracé de la Tangente MM_1. on a

$v = \frac{ds}{dt} = \frac{NM'}{dt}$. Le nombre Infinim^t. petit dt dépend du déplacement angulaire MOM' du Rayon vecteur, et de l'angle choisi pour Représenter l'unité de Temps. Soit pour le Rayon OA l'arc Aa qui Représente cette Unité

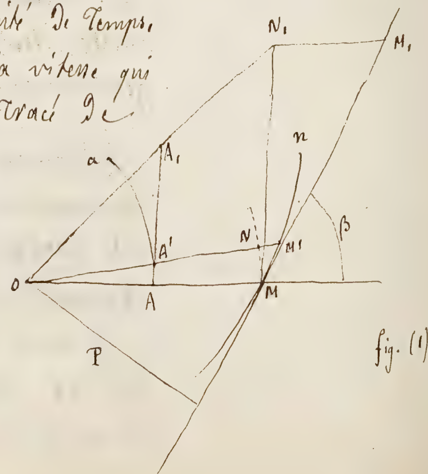


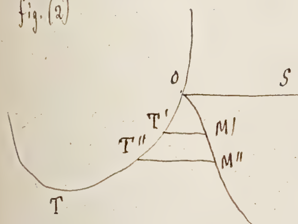
fig. (1)

on a donc
$$AA' = A\alpha . dt$$
et par suite
$$V = \frac{NM'}{AA'} . A\alpha$$
or $NM' = MN \, tg . NMM'$ et $AA' = MN . \frac{OA}{OM}$

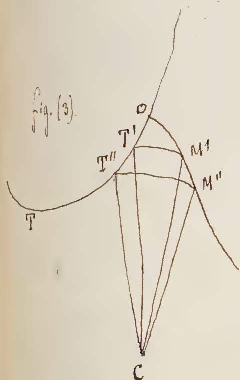
donc
$$V = \frac{OM}{OA} . A\alpha \, tg \, NMM' = N_1 M_1$$
en faisant $AA_1 = A\alpha$.

Généralisation des deux premiers modes.

autant de moyens de déterminer un point par deux longueurs, autant de modes de représentation du mouvem.t d'un point sur sa trajectoire.



Par exemple, les temps peuvent être proportionnels aux distances OT', OT''.. comptées sur la courbe OT, et les espaces parcourus sur la trajectoire, proportionnels aux longueurs $T'M'$, $T''M''$,.. portées parallèlement à un axe OS.



ou bien, les temps étant encore représentés par les arcs OT', OT''... on peut prendre proportionnels aux temps les nombres de degrés, ou grandeurs angulaires des arcs $T'M'$, $T''M''$.. ayant leur centre commun au point C.

---

§. 2. — Vitesses simultanées d'un Point et des extrémités de ses Coordonnées :

Coordonnées sur trois axes.

Les coordonnées x, y, z d'un point mobile, à la fin du temps t, donnent les projections conjuguées du point à cet instant. Si, pendant le temps dt, le mobile subit le déplacement élémentaire ds, les accroissements positifs ou négatifs dx, dy, dz sont tout-à-la-fois les déplacements élémentaires des projections du mobile sur les axes, et les projections sur ces mêmes axes du déplacement ds.

Si l'on mène par les deux extrémités de ds deux parallèles à un axe (par ex. oz), elles déterminent sur le plan coordonné (des xy) le déplacement élémentaire $d\zeta$ de la projection du mobile sur ce plan, lequel déplacemt. est la projection sur le plan (des xy) du déplacemt. ds.

En divisant par dt ces cinq déplacements élémentaires ds, dx, dy, dz, $d\zeta$, on voit que

1°. La vitesse de la projection, sur un axe, d'un point en mouvement sur un axe dans l'espace, est égale, pour l'intensité et le sens, à la projection, sur le même axe, de la vitesse de ce mobile.

2°. La vitesse du mobile dans l'espace est, en grandeur et en direction, la diagonale d'un parallélipipède dont les arêtes sont égales et parallèles aux vitesses des projections du mobile sur trois axes coordonnés.

3°. La vitesse de la projection sur un plan, d'un point dans l'espace, est égale à la projection sur ce plan de la vitesse propre du point.

4°. Cette dernière vitesse est la diagonale du parallélogramme

dont les côtés contigus à l'origine de cette diagonale sont la vitesse de la projection du mobile sur un axe, et la vitesse de sa projection sur le plan coordonné avec l'axe.

Les axes sont d'ailleurs quelconques, et par conséquent, les projections sont à volonté orthogonales ou obliques.

Notation.

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Cas particulier où la trajectoire est dans le plan des xy. — Les déplacements élémentaires ds, dx, dy simultanés, forment le Triangle Infinitésimal ou Différentiel considéré, à ce qu'il paraît, pour la première fois par Barrow (Géom. anglais, prof. de Newton à Cambridge, en 1660) à l'occasion des tangentes aux courbes.

Coordonnées Polaires.

La trajectoire étant supposée une courbe plane (fig. (1), page) MM'n, pendant que le point mobile principal décrit l'arc élémentaire MM' ou ds, le rayon vecteur décrit l'angle dα représenté par AA'. En même temps, le point géométrique M, étant considéré comme fixé sur le rayon vecteur en mouvement, décrit l'arc ρdα, représenté par MN. Enfin, et encore dans le même temps dt, le mobile considéré comme glissant le long du rayon vecteur, y parcourt le chemin relatif NM' ou dρ. — Ici, comme dans le cas des coordonnées ordinaires orthogonales, le triangle différentiel MNM' est rectangle : ses côtés sont proportionnels à trois vitesses simultanées savoir : la ~~vitesse~~ MM' ou ds, prop. à la vitesse $\frac{ds}{dt}$

sur la trajectoire ; $MN = \rho d\alpha$, à la vitesse dite de circulation autour du pôle O, vitesse dont l'expression est $\rho \frac{d\alpha}{dt}$; enfin NM', à la vitesse relative $\frac{NM'}{dt}$ sur le rayon vecteur.

Le quotient $\frac{d\alpha}{dt}$ s'appelle la vitesse angulaire du rayon vecteur OM, à l'instant considéré. Quand il est constant, c'est l'angle exprimé en nombre abstrait que parcourt le rayon vecteur dans l'unité de temps. — On peut dire aussi en général que la vitesse angulaire est la vitesse du point situé sur le rayon vecteur à l'unité de distance du centre de rotation. Du reste, pour un mouvement déterminé du rayon vecteur, l'expression numérique de sa vitesse angulaire est indépendante de l'unité de longueur, et ne varie qu'avec l'unité de temps. Un rayon faisant uniformément n révolutions dans le temps T a pour vitesse angulaire $\frac{2\pi n}{T}$.

En désignant par ω la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$ par v_ρ la vitesse $\frac{d\rho}{dt}$ relative le long du rayon vecteur, par β l'angle de la trajectoire avec le prolongement du rayon vecteur, par p la perp. du pôle O sur la tangente MM_1, on a, d'après le triangle différentiel :

$$v^2 = v_\rho^2 + \omega^2\rho^2$$

$$v_\rho = v \cos\beta$$

$$\omega\rho = v \sin\beta = v \frac{p}{\rho}$$

ou $$v = \frac{\rho^2}{p}\omega.$$

---

§. 3. – applications Spéciales des notions précédentes.

Mouvement Oscillatoire de la projection orthogonale P sur un axe fixe Ox d'un point M qui se meut Uniformément sur une Circonférence.

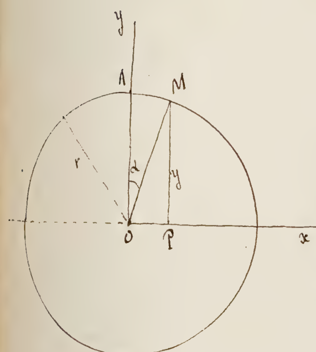


fig. (4).

$$AM = vt = \alpha r \;;\quad OP = x = r\,\sin\alpha \quad \text{ou} \quad x = r\,\sin\frac{vt}{r}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v\cos\frac{vt}{r} = v\cos\alpha = \frac{y}{r}$$

La vitesse v_x est donc proportionnelle à l'ordonnée y et de même signe. – Le Théorème 1° du §. précédent donne le même Résultat.

La courbe Représentative du mouvement de P, en coordonnées ordinaires, serait une Sinusoïde.

Mouvement Planétaire.

On connaît les Lois de Képler.

La Seconde permet d'exprimer celle suivant laquelle varie la vitesse angulaire du Rayon Vecteur. – Elle donne (fig. (1) page)

$$\tfrac{1}{2}\,p\,ds = C\,dt \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}\,p\,v = C$$

on a d'ailleurs en Général $v = \frac{\rho^2}{p}\,\omega$

donc $\omega = \frac{2C}{\rho^2}$

L'observation de deux valeurs simultanées de ω et ρ fait connaître $2C$, produit constant des deux variables ω et ρ^2.

---

§. 4. — Des mouvements Simples des Systèmes Invariables.

Tout mouvement d'un Système de points est nécessairement fini. — Mais si à un instant quelconque on n'étudie ce mouvement que sous le rapport des directions et des intensités des vitesses des différents points, en faisant abstraction de la courbure des trajectoires et de la variation des vitesses, on substitue à la considération des limites (par lesquelles on définit rigoureusement les directions et les vitesses) un énoncé plus simple, mais qui au fond a la même signification, en attribuant aux points des déplacements qualifiés infiniment petits ou élémentaires, se confondant avec les tangentes, et proportionnels aux vitesses pour l'instant dont il s'agit.

On distingue les mouvements, finis ou élémentaires, en mouvements simples et mouvem. composés.

Les mouvements simples d'un corps solide ou système invariable sont de deux espèces :

1°. Mouvement de Translation. — Toutes les droites qu'on peut imaginer dans le corps se déplacent en restant parallèles à leurs situations initiales. Tous les déplacements simultanés ont leurs cordes parallèles et égales. Tous les points ont des vitesses à chaque instant égales, parallèles et de même sens, pouvant d'ailleurs varier ensemble, d'un instant à l'autre, d'intensité et de direction.

2°. Mouvement de Rotation autour d'un axe. – Tous les points du système solide conservent invariablement leurs distances aux points d'une droite ou axe fixe. – Les plans de rotation sont perp. à l'axe. – Les arcs décrits sont proportionnels aux distances à l'axe. – Déplacement angulaire. – Vitesse angulaire constante ou variable. – Relation de la vitesse v d'un point dont la distance à l'axe est r, avec la vitesse angulaire ω du système au même instant : $v = r\omega$.

La Translation et la Rotation d'un système solide peuvent n'être qu'élémentaires, *instantanées*, c.à.d. qu'à un certain instant, les vitesses peuvent être toutes égales et parallèles, ou toutes perpend. à un même axe, et proportionnelles aux distances des points à cet axe, ces conditions n'étant plus réalisées à l'instant suivant.

Tout autre mouvement d'un système invariable est un mouvement composé dont la théorie géométrique sera étudiée plus tard.

Théorème.

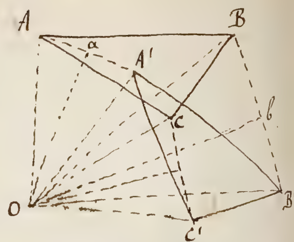
Tout mouvement élémentaire d'un système qui, dans l'espace, se meut parallèlement à un plan fixe, est un mouvement simple.

C'est-à-dire, que si ce n'est pas une translation simple élémentaire parallèle au plan fixe, c'est une rotation élémentaire autour d'un axe perp. à ce plan.

Démonstration. Quel que soit le système dans l'espace, il suffit de considérer le mouvement de sa projection orthogonale sur le plan fixe. – Or on voit aisément d'abord que si une figure plane subit un déplacement fini dans son plan, on peut toujours la faire passer de la première position à la seconde sinon par une translation, au moins par une Ro-

Rotation autour d'un point fixe.

fig (5).



Soient en effet AB, A'B' les deux positions d'une droite, O l'intersection des perp. aO, bO élevées aux milieux de AA' et BB'. .. etc. (connu).

Donc le point O est un centre de Rotation possible pour toute figure plane ABC entraînée en A'B'C'.

Si les droites AB, A'B' sont parallèles, O est à l'infini, la Rotation devient Translation.

De là on conclut le 1er Théorème, en considérant que si le mouvement de la figure liée à AB n'est pas effectivement une Rotation autour du point O, on peut, en décomposant les trajectoires de A en A' et de B en B' en éléments, substituer à ceux-ci d'autres éléments circulaires, en ne faisant à leurs longueurs et à leurs directions que des changements infiniment petits du second ordre, et par conséquent sans changer les vitesses ni en intensité, ni en direction. – Pour les déplacements élémentaires partant de A et de B, le centre de la Rotation est à l'intersection des deux normales en A et B. Le centre O a sa vitesse nulle quand celles des points A et B sont finies : celles-ci sont proportionnelles aux distances AO, BO au point O, comme si la figure tournait effectivement autour de ce point, qui d'ailleurs change à chaque instant, à mesure que la figure se déplace. C'est pourquoi ce point O s'appelle Centre instantané de Rotation, point unique à chaque instant, puisqu'il est impossible que deux points d'une figure plane soient sans vitesse quand elle se meut dans son plan.

S'il s'agit d'un système invariable qui, dans

l'espace, se meut parallèlement à un plan, les lignes AB, A'B' étant les projections orthogonales sur ce plan de deux positions d'une droite du système, le point O est la projection et la trace sur le même plan de l'axe instantané de rotation du système.

Suivant la définition déjà donnée, le rapport commun, à un instant déterminé, des vitesses de tous les points de la figure plane ou du système aux distances de ces points à l'axe instantané de rotation est, à l'instant considéré, la vitesse angulaire du système.

Exemples de Rotation instantanée.

1°. Liaison géométrique d'un balancier tournant autour de C' et d'une manivelle tournant autour de C par une bielle B'B : — L'articulation supérieure oscille de D en E, l'articulation inférieure décrit un cercle entier. À l'instant où la position du système est celle de la figure, on demande quels sont les rapports des vitesses des points B' et B, et d'un point quelconque M invariablement lié à la bielle.

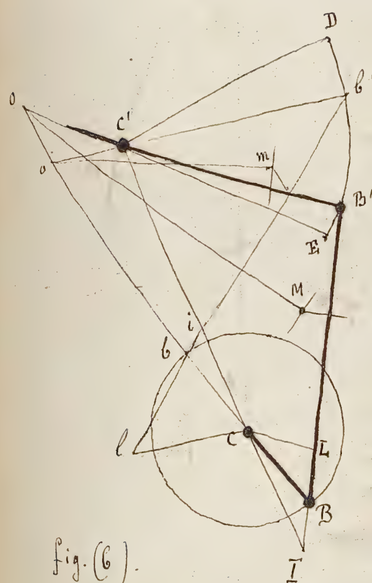


Fig. (6).

Le point O, intersection des normales B'C', BC, est le centre instantané de rotation de la bielle.

Si v, v' et u sont les vitesses de B, B' et M, on a $\frac{v}{BO} = \frac{v'}{B'O} = \frac{u}{MO}$. Ce sont 3 expressions de la vitesse angulaire instantanée de la bielle autour de O. Le point M décrit une courbe dont la tangente est perp. à MO. —

De $\frac{v}{BO} = \frac{v'}{B'O}$, on conclut $v \sin OBB' = v' \sin OB'B$, projections égales des deux vitesses v, v' sur BB', ce qu'on peut démontrer à priori.

Si l'on appelle ω la vitesse angulaire de la manivelle autour de C, et ω' celle du balancier autour

de C' à l'instant considéré, on a, en menant CL parallèle à $C'B'$:

$$\frac{\omega . BC}{\omega' . B'C'} = \frac{BO}{B'O} = \frac{BC}{CL}$$

D'où
$$\omega . CL = \omega' . C'B'$$
et par suite
$$\omega . CI = \omega' . C'I'.$$

Mêmes propriétés quand la Bielle passe comme bb' entre C et C' : alors $\omega . Ci = \omega' . C'i$.

Cet exemple montre bien 1°. que la Rotation Instantanée de BB' autour de O n'est pas une Rotation effective, puisque B' et B tournent réellement autour de C' et de C ; 2°. que le centre O n'est pas le centre de courbure des courbes décrites par B, B', M...

2°. - Conchoïde.

AB directrice, OM rayon vecteur, mM longueur constante. - Le point O', intersection de mO' perp. à AB, et de OO' perp. à OM, est le centre instantané de rotation de la droite mobile mM, qui peut être considérée comme entraînant avec elle le point, actuellement situé en O, dont la vitesse est par conséquent suivant Om. - D'où la normale $O'M$.

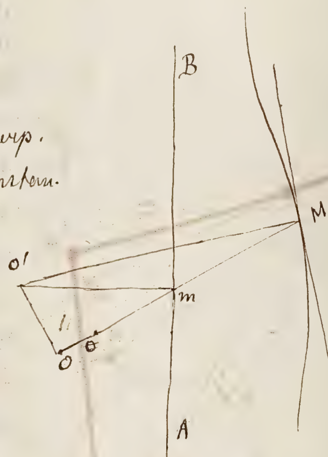


fig. (7).

3°. Les sommets A, B d'un triangle ABC se meuvent sur les droites fixes OM, ON. - Construire la courbe décrite par le sommet, et tracer les tangentes en quelques points de cette courbe.

4°. Mouvement d'une courbe plane roulant, sans glisser, sur une autre courbe, dans le même plan,

ou Mouvement Epicycloïdal, ou de Roulette.

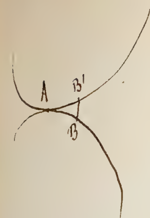


fig (8)

A étant le point de contact actuellement commun aux deux courbes, B et B' deux points qui coïncideront à un autre instant, il faut que les arcs AB, AB' soient égaux pour qu'il n'y ait pas glissement. – Si AB est infiniment petit, BB' est infiniment petit d'un ordre supérieur, puisque l'angle BAB' a pour limite zéro. – Le point A considéré comme appartenant à la courbe mobile est en mouvement, mais sa vitesse est nulle puisqu'elle passe par zéro en changeant de sens au moment considéré. C'est donc le centre instantané de rotation du système des points liés invariablement à la courbe mobile. – Les vitesses de tous ces points sont proportionnelles à leurs distances à ce point. Ces vitesses, et par conséquent les courbes décrites, ont actuellement leurs normales passant par ce même point de contact A, propriété remarquée par Descartes.

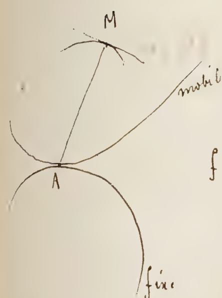


fig (9)

Cas particulier de la Cycloïde.

Epicycloïde. – Elle peut devenir une droite.

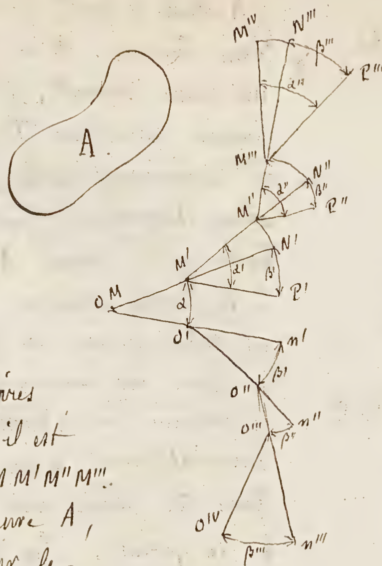
Théorème.

Tout mouvement d'une figure plane dans son plan se réduit à un mouvement épicycloïdal, dans lequel la courbe fixe est le lieu des centres instantanés de rotation.

Pour démontrer cette proposition, on substitue à la courbe des centres instantanés de rotation un polygone dont les sommets (qui pourront ensuite être rapprochés indéfiniment) sont des centres de rotation effective.

Soit A une figure quelconque, et soit O son centre de rotation actuel. Supposons qu'autour

de O elle tourne effectivement d'un angle α, qu'ensuite elle tourne autour de O' d'un angle α', puis autour de O'' d'un angle α'',
" O''' " α''',
et ainsi de suite.



avec ces données, qui résultent du mouvement défini de la figure A, c.à.d. avec le polygone des centres de rotation O O' O''... et les déplacements angulaires $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$.. qui leur correspondent, il est facile de construire un polygone M M' M'' M'''.. qui, lié invariablement à la figure A, soit tel qu'en le faisant rouler sur le polygone O O' O''... la figure A subisse les mouvements qui viennent d'être exprimés.

Désignons par $\beta', \beta'', \beta'''$.. les angles $n'O'O''$, $n''O''O'''$, $n'''O'''O^{IV}$,.. il suffira de tracer $MM' = OO'$, en faisant l'angle $M'OO' = \alpha$; puis " $M'M'' = O'O''$, " "
" $M''M'N' = \alpha' - \beta'$, et ainsi de suite.

En considérant les longueurs OO', $O'O''$,... comme infinimt. petites, et étendant à un corps solide ce qui vient d'être dit d'une ~~corps solide~~ figure plane, on voit que

Quand un corps solide se meut parallèlement à un plan, l'axe instantané décrit dans l'espace absolu un cylindre fixe, en même temps qu'il décrit par rapport au corps lui-même un second cylindre mobile auquel il peut être censé invariablement lié, et qui, par son roulement sans glissement sur le premier, reproduit exactement le même mouvement du corps, quel qu'il soit.

Théorème.. Tout mouvement élémentaire d'un

corps solide dont un point est sans vitesse, est une rotation simple autour d'un axe passant par ce point.

Connu.

Remarque. — Si une surface conique roule sans glisser sur une autre fixe ayant même sommet, tous les points liés invariablement à la première ont, dans chaque position pour axe instantané de rotation, la droite de contact des deux cônes.

Lorsque les deux cônes sont de révolution, la courbe décrite par un point quelconque lié au cône mobile, est une Épicycloïde sphérique.

Théorème. — Le mouvement d'un corps solide qui pirouette autour d'un point fixe se réduit à un mouvement épicycloïdal sphérique. — L'axe instantané décrit alors dans l'espace un cône fixe, et décrit en même temps par rapport au corps lui-même un second cône mobile avec ce corps, auquel on peut le concevoir lié invariablement, et qui, par son roulement sans glissement sur le premier, reproduit le mouvement réel du corps, quel qu'il soit.

La démonstration est analogue à celle de qui précède, en prenant les points o, o', o''.. à une distance constante du centre fixe de rotation, et en considérant les angles $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$... β', β''... comme des angles dièdres.

Chapitre II.

Composition des Mouvements.

---

§. I. – Composition des Vitesses d'un Point.

Un point nous paraît en mouvement lorsqu'il change de position par rapport à un corps que nous jugeons en repos. On donne une précision mathématique à cette définition, par l'ingénieuse conception des coordonnées parallèles à trois axes fixes, concourants, et non situés dans un même plan : si l'une au moins des trois coordonnées varie d'un instant à un autre, le point se meut, et réciproquement.

Mais si le système rigide pris pour base, ou, ce qui revient au même, si les trois axes de comparaison sont eux-mêmes en mouvement dans l'espace immobile, le déplacement d'un point M, constaté par les variations de ces coordonnées, n'est plus, comme dans le premier cas, un mouvement absolu dans l'espace immobile, mais un mouvement relatif dans l'espace mobile entraîné avec les axes de comparaison.

Ce mouvement relatif s'appelle aussi mouvement apparent, parce que si l'on imagine qu'un observateur entraîné à son insu dans le mouvement des axes de comparaison, considère ceux-ci comme fixes (ce qui nous arrive continuellement dans les questions de Mécanique où nous faisons abstraction du mouvement de la Terre), on voit que cet observateur attribuera au point M un mouvement qui sera précisément

son mouvement Relatif dans le Système des axes.

Le mouvement Relatif d'un corps dans un Système rigide de figure définie est lié à son mouvement absolu et au mouvement des axes, de sorte que l'un de ces mouvements est la conséquence nécessaire des deux autres. — De là la question suivante :

Problème. — Trouver les Relations entre la Vitesse Relative v_r d'un point, sa vitesse absolue v, et le mouvement du Système Rigide de Comparaison.

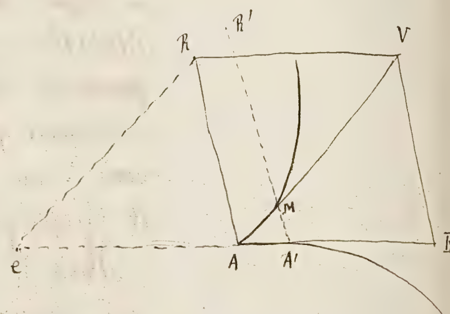


fig. (11)

Soit A la position du point à un instant déterminé.

$AV = v$ une droite Représentant, en grandeur et en direction, sa Vitesse absolue.

$AE = v_e$ une droite Représentant de même la Vitesse avec laquelle le point A, considéré comme point Géométrique lié au système de Comparaison, est entraîné dans le mouvement de ce dernier. Cette vitesse est appelée Vitesse d'Entraînement, et diffère en Général de celle d'un autre point pris à volonté sur le Système de Comparaison, sauf le cas où le mouvement de celui-ci est une Translation.

Dans un Temps infiniment petit dt, le mobile principal sera transporté en M sur AV, à une distance $AM = v\,dt$, tandis que le point Géométrique A lié au Système de Comparaison sera entraîné en A' à une distance $AA' = v_e\,dt$. Donc l'observateur qui, emporté avec ce système, considérerait le point A comme fixe pendant son Transport en A', attribuerait au mobile un mouvement en vertu duquel

celui-ci parcourrait un espace infiniment petit égal à $A'M = N_r dt$. — Les côtés du triangle AMA' sont donc proportionnels aux vitesses N N_e N_r ; ce qui détermine l'intensité de $N_r = EV$.

Quant à sa direction, c'est la limite des positions de la droite $A'M$ à mesure qu'on fait décroître le temps dt : c'est une parallèle à EV menée par A.

En achevant le parallélogramme $AEVR$, on conclut

Théorème. — La vitesse absolue est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés représentent de même l'un la vitesse d'entraînem^t. l'autre, la vitesse relative. — La première est dite la résultante des deux autres.

On peut dire encore que

La vitesse relative AR est la résultante de la vitesse absolue AV, et d'une vitesse ~~AE~~ Ae égale et opposée à la vitesse d'entraînement AE.

Il est à remarquer que la vitesse absolue est la même quelle que soit celle de ses deux composantes que l'on prenne pour vitesse d'entraînement, l'autre étant alors la vitesse relative. Cette propriété justifie jusqu'à un certain point l'usage reçu de dire qu'un point peut être animé simultanément de deux vitesses, ou de deux mouvements.

Dans le cas particulier où la vitesse absolue est nulle, la vitesse d'entraînement et la vitesse relative sont égales et opposées, et si le mouvement du système de comparaison est une translation, chacun de ses points décrit une trajectoire symétrique de la trajectoire apparente du point principal.

Composition d'un nombre quelconque de Vitesses. —

Un point ayant une certaine vitesse relativement à des axes mobiles, ceux-ci peuvent avoir eux-mêmes un certain mouvement relativement à d'autres axes aussi mobiles.

Exemple. — Un boulet est lancé d'un point de la Terre avec une vitesse apparente v'. Le point de départ considéré relativement à l'axe des pôles ON et à une autre droite OE dirigée du centre dans l'Equateur parallèlement à une droite fixe de l'Espace, a un mouvement de Rotation Uniforme autour de cet axe polaire. Il a donc, à ce point de vue, une vitesse relative v''. Enfin l'axe des pôles ON et la droite OE ont un mouvement commun de translation curvi-ligne autour du Soleil, mouvement dont la vitesse v''' peut être considérée comme absolue (?). Ainsi la vitesse du point de départ est la résultante de v''' (vitesse d'Entraînement) et de v'', vitesse relative. Ensuite la vitesse du Boulet est la résultante de la vitesse du point de départ (qui devient vitesse d'entraînement) et de la vitesse v'.

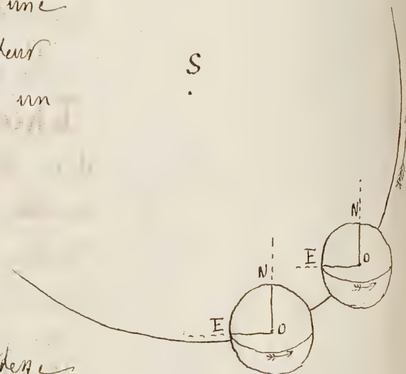


fig. (12)

En composant v''' et v'', puis la résultante avec v', et en généralisant les conséquences de ces compositions successives, on voit comment on est conduit à considérer une vitesse comme la résultante d'autant de composantes qu'on veut.

On voit aussi (fig. 13) que cette résultante est représentée en grandeur et en direction par la droite partant du point mobile, et fermant un contour polygonal qui, à partir de ce même point, a ses côtés égaux et parallèles aux vitesses composantes.

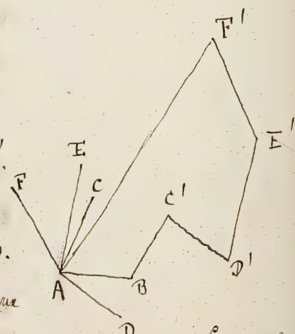


fig. (13)

On déduit de là diverses conséquences géométriques ou trigonométriques, entre autres celle-ci : La projection de la vitesse résultante sur un axe est égale à la somme algébrique des projections des vitesses composantes sur le même axe, et la proj. de la même vitesse résultante sur un plan est la résult. des proj. des vit. comp. sur le même plan.

Application. — Méthode de Roberval pour la recherche des tangentes aux courbes.

Si une courbe est considérée comme décrite par un point dont la vitesse soit la résultante de plusieurs autres, il suffit de connaître les directions et les rapports des vitesses composantes pour en conclure la direction de la tangente. C'est le principe de la méthode de Roberval, géomètre français du 17e siècle.

Exemple. — L'Ellipse dont on a un point M et

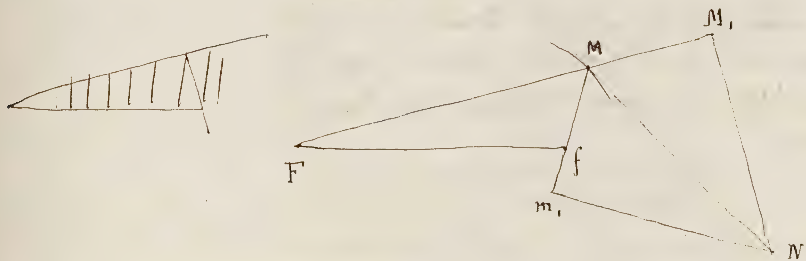


fig. (14)

les foyers F, f, étant supposée décrite par une pointe qui glisse le long du rayon vecteur FM tournant autour de F, soit MM_1 la vitesse relative suivant le rayon : la vitesse absolue est l'hypoténuse inconnue MN du triangle MM_1N dont le côté serait la vitesse d'entraînement du point M en vertu de la rotation de FM. Mais on peut

considérer aussi la Courbe comme décrite par une pointe glissant sur Mf avec la vitesse $Mm_1 = MM_1$, puisque le 2d Rayon vecteur diminue autant que le 1er augmente. Donc l'extrémité de la droite représentant la Vitesse est en N, rencontre des deux perp. M_1N, m_1N ; etc.

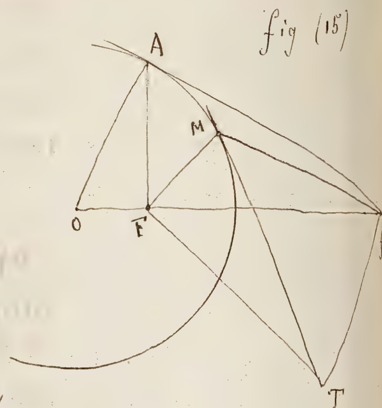


fig (15)

La même méthode s'applique au cercle défini par la condition que les deux Rayons vecteurs FM, fM sont dans un Rapport constant,

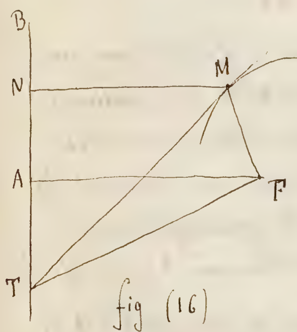


fig (16)

Et à une Section Conique dont on a un foyer F et la Directrice correspondante AB.

Mr. Duhamel a signalé depuis longtemps l'erreur que d'autres savants avaient commise en considérant la Vitesse sur la Trajectoire comme étant la Résultante des Vitesses du point décrivant sur deux Rayons Vecteurs.

---

§ 2. Composition des mouvements élémentaires d'un Point.

Le déplacement élémentaire absolu AM ou ds ou $v\,dt$ d'un point principal ayant lieu en même temps que le mobile subit le déplacement relatif $ds_r = v_r\,dt$ dans un système de comparaison qui, emportant le point géométrique A, l'oblige à un déplacement d'entraînement $ds_e = v_e\,dt$, il est clair qu'on a entre les trois déplacements élémentaires $v\,dt$, $v_r\,dt$, $v_e\,dt$ les mêmes relations qu'entre les trois vitesses v, v_r, v_e.

Il en résulte que, abstraction faite de la courbure des trois trajectoires (réserve importante sur laquelle nous reviendrons plus tard, p.   ), la position M du mobile à la fin du temps dt s'obtient en faisant partir de A une ligne brisée AA'M, dont les côtés sont le déplacement d'entraînement AA', et le déplacement relatif A'M, l'un d'eux étant transporté parallèlement à la vitesse qui lui correspond.

Donc le mobile principal parti de A au commencement du temps dt occupe à la fin de ce temps le même lieu que s'il avait parcouru successivement les deux déplacements composants $AA' = v_e\,dt$ et $A'M = v_r\,dt$, en commençant indifféremment par l'un ou par l'autre.

On emploie fréquemment cette considération de mouvements successifs, qu'on peut même prendre pour notion fondamentale de la composition des mouvements. – En réalité, ils sont simultanés, et il faut bien parler de mouvements relatifs.

---

§ 3. – Composition des mouvements simples d'un Corps Solide.

1°. Composition des mouvements de Translation.

Si le mouvement d'Entraînement, c'est-à-dire celui du Système de Comparaison, est une Translation, et qu'il en soit de même du mouvement, relativement à ce Système, d'un autre Système Rigide, le mouvement absolu de celui-ci est aussi une Translation. Car, pour deux points M', M'' quelconques, les vitesses v'_e v'_r et v''_e v''_r sont respectivement égales, parallèles et de même sens : donc il en est de même des vitesses absolues v', v''. – Cette proposition s'étend évidem.t à un nombre quelconque de mouvements de Translation Composants. Si ces derniers sont Rectilignes et Uniformes, il en est de même du mouvement absolu.

Décomposition d'un mouvement de Translation quelconque en trois Translations rectilignes parallèlement à trois axes non parallèles à un même plan. La Vitesse du mouvement composant parallèle à l'axe des x, à un instant quelconque, est la vitesse de la projection d'un point du Système sur cet axe, projection faite par des plans parallèles aux deux axes des y et des z.

2°. Composition des mouvements de Rotation autour d'axes Concourants.

Soient deux axes OA, OA', qui avec une troisième droite, par exemple avec la perpendiculaire projetée en O,

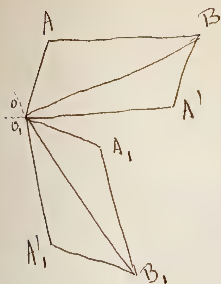


fig. (17)

forment le Système Solide de Comparaison. Supposons que son mouvement absolu (qui est un mouvement d'Entraînement) soit une Rotation effective, ou seulement Instantanée autour de la droite OA avec une vitesse angulaire ω. En même temps un Système Solide M (qu'on peut Imaginer comme formant un corps réel, matériel) dans son mouvement relativement au Système OAA', tourne autour de OA' avec une vitesse angulaire ω'.

Le point O étant actuellement sans vitesse dans le corps M, il s'ensuit que ce corps a un axe Instantané de Rotation passant par O, c.à.d. qu'il y a actuellement une droite, liée au Solide M, dont tous les points ont leurs vitesses nulles. Il s'agit de trouver sa situation actuelle, et la vitesse angulaire du corps M autour de cette droite.

Pour fixer les Idées, Supposons que les longueurs OA, OA' soient proportionnelles aux vitesses angulaires ω, ω'. Supposons en outre que le Sens de chaque Rotation soit tel que si un observateur, placé en O, dirigeait sa vue tantôt vers A, tantôt vers A', il verrait la Rotation d'entraînement et la Rotation Relative se faire dans le même Sens que le mouvement d'une aiguille d'horloge (c'est le Sens de la Rotation d'une vis ordinaire : c'est le mouvem^t. Rétrograde des astronomes).

D'après ces Conventions, les droites OA et OA' pourront à juste titre être nommées les axes Représentatifs des Deux Rotations dont il s'agit.

De plus, pour abréger, supposons le plan AOA' horizontal. Il est aisé de voir que, pour aucun des points du Corps M situés hors de ce plan AOA', la vitesse absolue Résultante des deux vitesses d'entraînement et Relative ne peut être nulle. C'est donc dans ce plan qu'est l'axe Instantané cherché.

Pour trouver sa direction, et en même temps l'intensité

de la vitesse angulaire absolue du corps M, élevons en O une verticale, qui sera par conséquent perp. à l'hor-izontale. Supposons cette verticale égale à l'unité de longueur, et cherchons la vitesse absolue de son extrémité supérieure O_1. — or ce dernier point aura sa vitesse d'entraînement égale à ω, et représentée par l'hori-zontale O_1A_1 égale et perp. à OA, sa vitesse relative égale à ω', et représentée par O_1A_1' égale et perp. à OA'. — Sa vitesse absolue, qui est en même temps la vitesse angulaire du corps M, est donc représentée par la diagonale O_1B_1. L'axe instantané est donc suivant une droite menée dans le plan AOA' perp. sur O_1B_1. D'où l'on conclut que la droite OB, diagonale du parallélogramme AOA'B, représente pour la direction, le sens et l'intensité, la rota-tion résultante.

On retrouve ici toutes les propositions analogues à celles de la composition des vitesses : polygone, projections, relations géométriques et trigonomé-triques.

3°. Composition de rotations autour de deux axes parallèles.

Si les rotations sont de même sens, et représen-tées par OA', O'A', toutes les vitesses absolues des points du corps M qui sont actuellement dans le plan AOA' sont perp. à ce plan, comme leurs deux compo-santes ; elles sont nulles pour tous les points de la parallèle mn, satisfai-

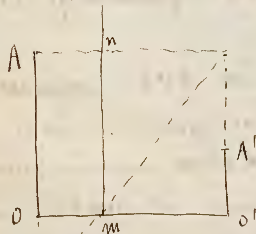


fig (19)

faisant à la Condition

$$\omega . Om = \omega' . O'm .$$

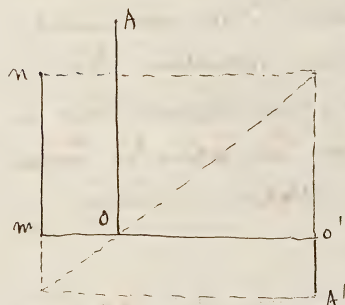
La vitesse angulaire Résultante est Egale à la vitesse absolue d'un point Divisée par sa Distance à l'axe mn.

Vitesse absolue de O' = Vitesse d'Entraînement $= \omega . OO'$.
La vitesse angulaire absolue ou Résultante est

$$\Omega = \frac{\omega . OO'}{O'm} = \frac{\omega . O'm + \omega . Om}{O'm} = \omega + \omega'$$

Si les Rotations sont de sens contraires, dans l'intervalle de OA à O'A, les vitesses composantes sont Descendantes; en dehors, et du côté de la plus petite des deux Rotations, la vitesse d'entraînement descendante l'emporte sur la vitesse Relative ascendante; en dehors du même Intervalle, du côté de la plus grande vitesse angulaire, la vitesse est nulle en mn si l'on a

fig. (20)



$$\omega . Om = \omega' . O'm$$

et l'on a

$$\Omega = \frac{\omega . OO'}{O'm} = \frac{\omega . O'm - \omega . Om}{O'm} = \omega - \omega'$$

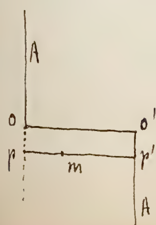
---

fig (21)

4°. Composition de Deux Rotations parallèles, égales, et de sens Contraires. (Couple de Rotations).

Pour un point quelconque m, on a

$$V_e = \omega . mp \quad V_r = \omega . mp' \quad V = V_e + V_r = \omega . OO' = \text{Const.}$$



pour l'instant considéré. — Le mouvement absolu ou résultant est une translation perpendiculaire au plan des axes de rotations composantes.

Remarque. — Lorsque le mouvement absolu d'un corps résulte de la composition de deux ~~rotations~~ translations finies, c'est-à-dire continuées pendant un temps fini, ce mouvement absolu est lui-même une translation. — Mais la composition de deux rotations finies ne donne lieu qu'à une suite de rotations instantanées autour d'un axe mobile. Cela résulte de ce que l'axe instantané de la rotation absolue est à chaque instant dans le plan de l'axe de la rotation du système de comparaison et de l'axe de la rotation relative.

Exemple.

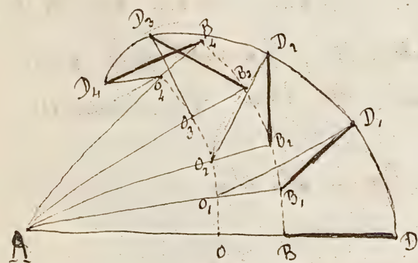


fig (22)

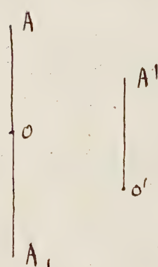
Une droite AB tourne dans le plan fixe de la fig. avec une vitesse constante ω autour du point A, pendant qu'une autre droite BD a autour du point mobile B une rotation uniforme ω' relativement à AB, de sorte que lorsque celle-ci a pris la position AB_1, la droite BD a la position B_1D_1, faisant avec le prolongement de AB_1 un angle qui est à l'angle B_1AB dans le rapport constant $\frac{\omega_1}{\omega}$. Le point

D décrit une courbe $D\,D_1\,D_2\,D_3\,D_4$ .. dont les normales passent par les Centres Instantanés O, O_1, O_2, O_3, O_4 ... La vitesse angulaire absolue de BD dans ses positions successives est constamment $\omega + \omega'$ autour du Centre Instantané variable. La vitesse du point D varie proportionnellement aux distances OD O_1D_1 O_2D_2 ...

Réduction à deux mouvements simples d'un nombre quelconque de mouvements simples composants.

On remarque d'abord qu'une Rotation quelconque peut être remplacée par une autre égale autour d'un axe parallèle, et par une Translation. En effet soit une Rotation $OA = \omega$. Introduisons deux Rotations OA_1 et $O'A'$ de même grandeur que OA, mais formant un couple équivalent à la Translation ascendante $\omega . OO'$, et détruisons-en l'effet par une Translation égale descendante.

fig. (23)



Il reste en définitive la Rotation $O'A'$ égale à OA et de même sens, et une Translation descendante dont la vitesse sera précisément celle du point O' considéré comme tournant avec la vitesse angulaire ω autour de OA.

D'après cela, on peut toujours remplacer un nombre quelconque de Rotations autour d'axes non concourants par autant de Rotations autour d'axes concourants, en un point choisi à volonté, lesquelles, d'après ce qu'on a déjà vu, se composent en une seule ; et par

autant de translations qui, réunies aux autres primitivement supposées, se réduisent à une seule translation.

---

§. 4. – Décomposition d'un mouvement qcq. d'un Solide en mouvements Simples.

1°. Décomposition en une Translation et une Rotation.

Si l'on prend arbitrairement un point O d'un corps solide en mouvement et qu'on le considère comme étant le sommet mobile d'un Trièdre de comparaison qui se transporte parallèlement à lui-même, on aura ainsi un Mouvement d'Entraînement de Translation ; et le Mouvement Relatif du corps Solide par Rapport au Trièdre se fera autour de O considéré comme fixe au Sommet, et par conséquent sera une Rotation autour d'un axe Instantané passant par ce point. Il s'ensuit que tout mouvement continu d'un corps solide équivaut au Roulement d'un cône lié au corps sur un cône qui aurait un mouvem^t. de Translation dans l'espace.

Cette décomposition peut se faire, en Général, d'une Infinité de manières, en faisant Varier le point O.

2°. Décomposition Instantanée particulière en une Translation parallèle à Un axe, et une Rotation autour du même axe.

Soit OV représentant la vitesse du point O,



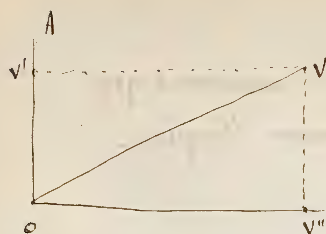


fig. (24)

et la translation composante dont il vient d'être question. Et soit OA l'axe représentatif de la rotation correspondante.

Décomposons la Rotation Translation OV en deux : l'une OV' suivant OA, et l'autre OV" perpendiculaire. Considérons OV' comme translation d'entraînement d'un système de comparaison ; il restera pour mouvement relatif du système principal un mouvement résultant de la translation OV" et de la rotation OA, mouvement qui sera nécessairement parallèle au plan perpendiculaire à OA, et qui sera par conséquent une rotation instantanée autour d'un axe O_1A_1 parallèle à OA, parallèle lui-même à la translation d'entraînement. La droite O_1A_1 jouit donc de cette propriété très remarquable que toutes les vitesses du solide en mouvement sont, à l'instant considéré, les mêmes que si le corps était lié à une vis se mouvant dans son écrou fixe, et ayant pour axe cette droite, qu'on appelle axe central de rotation.

Suivant la remarque du Général Poncelet, si l'on mène par un point K de l'espace trois droites égales et parallèles aux vitesses de trois

point du corps ; puis encore par K une droite perpendiculaire au plan déterminé par les extrémités de ces trois droites, cette perpendiculaire est parallèle à l'axe O, A, etc.

3°. Décomposition d'un mouvement quelconque en trois translations parallèles à trois axes concourants, et en trois rotations autour du même axe.

C'est évident.

---

§. 5. Du Mouvement Relatif de deux corps quelconques.

Glissement, Simple ou Mixte.

Les mouvements absolus de deux Systèmes (A), (B), dont l'un au moins (A) est solide, étant donnés, la Recherche du mouvement Relatif de l'autre (B) par Rapport au 1er (A) se Réduit à une question de Décomposition de mouvement : car, d'après la défi-nition même de la Décomposition des mouvements, le mouvement absolu du corps (B) peut être consi-déré comme composé du mouvement du Corps (A) et du mouvement Relatif cherché ; ou bien encore, ce mouvement Relatif est Composé du mouvement absolu de (B) et du mouvement d'entraînement de A, pris en sens Contraire.

Glissement Simple ou Mixte de deux Corps en Contact.

Deux corps Étant en Contact et en mouvement Relatif, il y a Glissement Simple, si les mêmes points de l'un des corps coïncident successivement avec différents points de l'autre. — Il y a Roulement Simple si les points Géométriques de Contact se déplaçant sur les deux Corps y parcourent relativement des arcs Égaux. Dans tout autre cas, il y a Roulement mixte, que l'on peut Concevoir décomposé en Roulement simple et glissement simple.

Exemple. — Deux Cylindres, dont il suffit

de considérer deux sections droites dans un même plan.

M et m, deux points appartenant respectivement aux deux cylindres (A) et (a), coïncidant à un certain instant; à un instant suivant, et très-rapproché, le point m de (a) étant transporté en m'; le contact a lieu entre deux points n', N', dont le premier était précédemment en n, et [illegible]

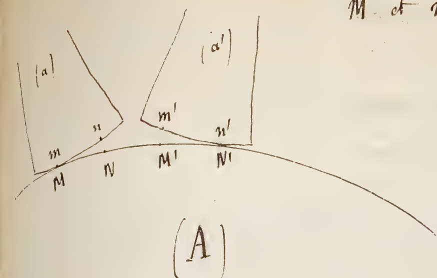


fig. (25)

Si les arcs mn, MN' étaient égaux, ce serait le cas de simple roulement; sinon, la différence NN' entre MN' et mn est l'arc de Glissement. — Comme il s'agit de déplacements infiniment petits, les points n et m' peuvent être considérés comme se confondant avec la courbe MN' ou avec sa tangente. Donc:

L'arc élémentaire de Glissement, pendant un temps infiniment petit, est donc égal à la distance Mm' qui sépare à l'instant final deux points M, m, qui coïncident à l'instant initial. Le quotient $\frac{Mm'}{\theta}$ de l'arc de Glissement divisé par le temps correspondant est la Vitesse de Glissement.

La figure suppose le corps A immobile, mais s'il était en mouvement, ce qui précède s'appliquerait au mouvement relatif des deux corps. — D'ailleurs, pendant un temps infiniment petit, la tangente en M ne pourrait tourner que d'un angle infiniment petit.

On va voir une application de ces considérations.

Mouvement de deux Corps en Contact par des Cames Cylindriques.

Deux corps solides tournant autour de deux

axes fixes parallèles C, C', sont en Contact par Deux Surfaces Cylindriques (Cames ou Dents) Dont les Génératri-ces sont parallèles aux Dits axes.

Il s'agit de Trouver le Rapport des Vitesses angu-laires ω, ω' des Deux Corps, et leur Relation avec la vitesse de Glissement V_g.

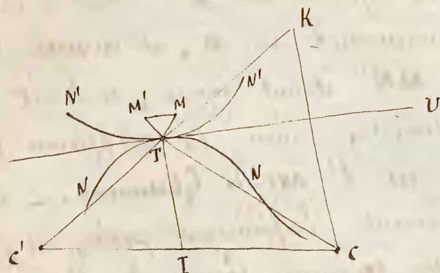


fig (26)

axe C, lié à la Surface NTN;
" C' " " N'TN'.

Le point T, considéré comme appartenant à la Surface NTN, se Transporte en M, perpendiculairement à TC; Le point T, comme appartenant à N'TN', se trans-porte en M', perpendiculairement à TC'.

M'M est Donc l'arc de Glissement, et par Conséquent parallèle à la Tangente TU, sauf un angle infi-niment petit, qui Disparait à la Limite. ainsi les trois côtés Du Triangle Différentiel, proportion-nels aux vitesses De Circulation $\omega.TC$, $\omega'.TC'$, et à la vitesse de Glissement, – sont Respectivement perpendiculaires à TC, TC' et TI. Donc si l'on mène CK parallèle à TI, on a Deux Triangles Semblables

MTM', CKT,

qui donnent

$$\frac{MT}{TC} = \frac{M'T}{TK} = \frac{MM'}{CK}$$

ou

$$\frac{\omega . TC}{TC} = \frac{\omega' . TC'}{TK} = \frac{N_g}{CK}$$

donc

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{TC'}{TK} = \frac{C'I}{CI}$$

ou

$$\omega . CI = \omega' . C'I$$

et

$$N_g = CK . \omega = \omega . \frac{TI . CC'}{C'I} = TI (\omega + \omega')$$

Pour que $\frac{\omega}{\omega'}$ soit constant, il faut que l'axe I soit fixe. V_g est alors proportionnelle à TI.

(Expliquer l'analogie de l'équation

$$\omega . CI = \omega' . C'I$$

avec celle qu'a donnée le système de deux Balanciers unis par une bielle.)

Cas Particulier : – Cames et Pilons. –

fig. (27)

C, axe de Rotation de la Came, dont le profil est NTN ; – Le pilon, lié à la courbe N'TN' a un mouvement de translation rectiligne perpendiculaire à CI. – Dans le triangle différentiel TM'M, les côtés TM', TM, MM' (dont le 1er est perp. à CI) sont proportionnels à la vitesse V du pilon, à la vitesse ω . TC de circulation du point de contact de la Came, et à la vitesse de glissement V_g.

Les deux Triangles TMM', TCI sont semblables.
donc

$$\frac{\omega . TC}{TC} = \frac{V}{IC} = \frac{V_g}{TI}:$$

$$V = \omega . CI.$$

$$V_g = \omega . TI.$$

Chapitre III.

De l'accélération.

---

§. 1. – De l'accélération tangentielle.

Jusqu'ici, nous ne nous sommes occupés de la vitesse que sous le rapport de sa direction et de son intensité à un instant déterminé. Il nous reste à considérer, au point de vue de la cinématique, les variations qu'elle subit; et d'abord, nous ne parlerons que de la grandeur variable de la vitesse en faisant abstraction de la courbure de la trajectoire.

Soit v la vitesse d'un point à l'instant où finit le temps t, et soit $v + \Delta v$ ce qu'elle devient à l'instant où finit le temps $t + \Delta t$. – Le quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ est l'accroissement moyen de la vitesse par unité de temps, pendant le temps Δt. – Si cette quantité est constante quel que soit Δt, le mouvem^t. est dit uniformément varié. – Si elle varie, $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ approche, à mesure que Δt diminue, d'une limite $\frac{dv}{dt}$, formule qui convient d'ailleurs aux deux cas.

Constante ou variable, la quantité $\frac{dv}{dt}$, quand elle est positive, indique ce qu'on pourrait appeler proprement la vitesse de l'accélération, c'est-à-dire la rapidité de l'augmentation de la vitesse. – Pour simplifier et généraliser le langage, cette quantité $\frac{dv}{dt}$, quels que soient son signe et sa valeur à l'ins.

-tant où finit le Temps t, se nomme l'accélération pour cet Instant, si le mouvement est Rectiligne, et l'accélération Tangentielle, lorsque le mouvement est Curviligne.

On Reconnait, par la discussion des 4 cas possibles, que, lorsque la vitesse et l'accélération sont de mêmes Signes, le mouvement est accéléré dans le Sens Vulgaire de ce mot; et que, si elles sont de Signes Contraires, le mouvement est Retardé.

D'après sa Définition, l'accélération Tangentielle à un Instant quelconque résulte de la Relation entre la vitesse et le Temps.

Si cette Relation est donnée par une Equation

$$v = f(t)$$

on en tire

$$\frac{dv}{dt} = f'(t)$$

Si elle est donnée par des valeurs Simultanées, en nombre Suffisant, de la vitesse et du Temps, cette Relation pourra être Représentée par une Courbe dont les coordonnées seront proportionnelles les unes aux Temps comptés à partir d'un Instant Initial, les autres, aux vitesses. — Dans le cas du mouvement uniformément Varié, la ligne Représentative est Droite; l'accroissement positif ou négatif de l'ordonnée pour un accroissement de l'abscisse positif et Représentant l'unité de Temps, est l'accélération positive ou négative. — L'espace parcouru dans un Certain Temps est Représenté par une aire. — Cette Considération a guidé

Galilée dans la Recherche de la loi qui lie l'espace au temps dans le mouvement uniformément varié.

Pour un mouvement quelconque, l'accélération s'obtient par le tracé de la tangente à la courbe représentative des vitesses. — L'espace parcouru est encore représenté par une aire, dont la détermination revient au calcul exact ou approché d'une intégrale.

Généralement, entre les quatre quantités

$$s \quad t \quad v \quad j$$

(cette dernière lettre désignant l'accélération, même lorsqu'elle est variable). on a les deux équations

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad j = \frac{dv}{dt}.$$

Une troisième équation suffit pour déterminer, sauf les constantes initiales, la loi du mouvement et ses conséquences, dont l'expression s'obtient, dans la plupart des cas, par des quadratures, exactes ou approchées.

1°. Si l'on a $s = f(t)$, on conclut $v = f'(t)$ et $j = f''(t)$.

2° " $v = f(t)$ " $j = f'(t)$ et $s = s_0 + \int f(t)\,dt$

3° " $j = f(t)$ " $v = \int f(t)\,dt$ et $s = s_0 + \int v\,dt$

4° " $v = f(s)$ " $t = \int \frac{ds}{f(s)}$ et $j = f'(s).f(s)$.

5° " $j = f(s)$ " $v^2 - v_0^2 = 2\int f(s)\,ds$ c.à.d. $v = \varphi(s)$

et par suite. $t = \int \frac{ds}{\varphi(s)}$

6° " $j = f(v)$ " $t = \int \frac{dv}{f(v)}$ et $s = \int \frac{v\,dv}{f(v)}$.

Méthodes d'approximation pour calculer $\int_{x_0}^{X} y\,dx$.

1°. La formule de Thomas Simpson suppose que les ordonnées équidistantes $y_0\ y_1\ y_2 \ldots y_n$ obtenues en divisant l'intervalle $X - x_0$ en un nombre pair $\underline{n}$ de parties égales, ont leurs différences secondes à-peu-près constantes; que par conséquent la courbe dont il s'agit d'avoir la quadrature diffère peu de celle qu'on obtiendrait en joignant 3 à 3 les extrémités des ordonnées par des arcs de parabole du 2e degré.

Formule : $\int_{x_0}^{X} y\,dx = \frac{X-x_0}{3n}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n\right)$

Comme conséquence de la même hypothèse, on a pour l'aire comprise entre deux ordonnées consécutives y_1 et y_2 dont la distance est δ

$$\frac{\delta}{12}\left(5y_1 + 8y_2 - y_0\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\delta}{12}\left(5y_2 + 8y_1 - y_0\right)$$

Si la courbe passant par 4 points répondant aux ordonnées équidistantes $y_0\ y_1\ y_2\ y_3$ ne différait pas sensiblement d'une parabole du 3e degré, l'aire comprise entre y_0 et y_3 serait $\frac{x_3 - x_0}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right)$.

2°. Formule du Général Poncelet. — Ordonnées extrêmes, y_0 et Y : ordonnées intermédiaires $y_1\ y_2 \ldots y_n$, équidistantes, en nombre quelconque. L'intervalle de y_0 à y_1 et de y_n à Y n'est que la moitié de la valeur constante $\frac{1}{n}(X - x_0)$ des autres intervalles. — Intégration approximative :

$$\int_{x_0}^{X} y\,dx = \frac{X - x_0}{n}\left\{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n + \frac{y_0 + Y - y_1 - y_n}{8}\right\}$$

§. 2. – De l'accélération totale dans le mouvement curviligne.

L'étude du mouvement curviligne d'un point se ramène à celle du mouvement de ses projections sur des axes coordonnés.

Soit v la vitesse du mobile à l'instant où il passe en M : soit à la suite MM_1 une portion de la trajectoire curviligne ; soient MN', MN'' ses deux projections sur deux axes Mx', Mx'', menés par M dans le plan osculateur, et suivant des directions que nous supposerons d'abord quelconques. Si, pour les positions successives du mobile entre M et M_1, on fait ses projections sur les mêmes axes, le mouvement de chaque projection sera en général un mouvement varié ; mais on pourra prendre MM_1 assez petit pour que, pendant la durée très-petite de son parcours, les mouvements rectilignes suivant MN' et MN'' soient, sauf une erreur négligeable, des mouvements uniformément variés exprimés par les équations

$$x' = v_{x'}\,\theta + \tfrac{1}{2} j' \theta^2$$

$$x'' = v_{x''}\,\theta + \tfrac{1}{2} j'' \theta^2$$

ce qui revient à dire qu'on peut négliger les puissances supérieures à θ^2 du petit temps θ, et l'on voit aisém^t. que cette approximation étant admise pour deux axes déterminés s'applique également à un axe quelconque. Les facteurs $v_{x'}$ et $v_{x''}$ sont et doivent être les projections

de la vitesse sur les axes coordonnés Mx' et Mx''.

Cela posé, parmi les systèmes d'axes Mx', Mx'' qu'on peut choisir, il en est un qui simplifie le plus possible ces équations. L'un est dirigé suivant la tangente en M, d'où il résulte $v_{x'} = v$ et $v_{x''} = 0$. L'autre, Mx'', est dirigé de manière que la projection MN' de la courbe MM_1 faite par la parallèle M_1N' soit égale au seul produit de la vitesse v par le temps du parcours de MM_1. — Cette dernière propriété a dès lors lieu pour tous les points de MM_1, et les deux équations se réduisent à

$$x' = vt \quad \text{et} \quad x'' = \frac{1}{2} J t^2$$

fig (28)

Définition. — L'accélération J qui existe suivant l'axe Mx'' ainsi défini, est ce qu'on appelle l'accélération totale à l'instant du passage du mobile au point M : ce qui revient à dire que si l'on considère le mouvement du point dont il s'agit relativement à un système de comparaison ou milieu géométrique ayant un mouvement de translation rectiligne avec la vitesse v du mobile à cet instant, l'accélération totale est l'accélération du mouvement rectiligne relatif de ce même mobile.

L'accélération totale peut être considérée sous un autre point de vue qui suppose d'ailleurs la propriété qui vient d'être établie pour les axes Mx', Mx'' de la fig. (28). Le mobile arrivé de M en M_1 dans le

temps θ ou Δt possède une vitesse v_1 qui est la Résultante de la vitesse v conservée parallèlement à MN', et de la vitesse $J\,\Delta t$ acquise parallèlement à MN''. Si donc, adoptant un langage proposé par quelques Géomètres, on dit que la vitesse v_1 est la Somme Géométrique des deux vitesses v et $J\Delta t$, ou que $J\Delta t$ est l'accroissement Géométrique (x) de la vitesse v, on pourra définir l'accélération Totale une quantité qui se constitue d'une Direction et d'une grandeur; savoir: la Direction, donnée par celle de l'accroissement Géométrique Infiniment petit de la vitesse pendant un Temps Infiniment petit, et la Grandeur, égale au quotient fini de ces deux Infiniment petits.

(x) Quelques personnes, déterminées sans doute par la signification vulgaire du mot accélération, ont proposé d'appeler accélération Élémentaire la quantité $J\Delta t$ ou Jdt. Cela paraît contraire à la loi d'analogie, qui veut que la quantité élémentaire soit de même nom que la quantité finie produite par son Intégration. Jdt est une vitesse Élémentaire, et non une accélération dans le sens admis en mécanique pour ce dernier mot, de même que vdt est un Espace Élémentaire et non une vitesse.

Cette définition, qui comprend comme cas particulier celle qui a été donnée pour le mouvement Rectiligne, pourrait être exprimée ou rappelée par la notation

$$J = \frac{d_g v}{dt}$$

la lettre g remplaçant le mot géométrique.

L'accélération Totale a encore une autre propriété Importante et caractéristique. – Prenons un axe Ox quelconque même hors du plan osculateur de la Courbe, puis un plan directeur ou coordonné quelconque yoz, et projetons sur Ox la brisée $MN'M_1$. Nous avons, à cause de $MN' = v\Delta t$, et $N'M_1 = \frac{1}{2} J \overline{\Delta t}^2$,

$$mm_1 = mn' + n'm_1 = v_x\,\Delta t + \tfrac{1}{2} J_x\,\overline{\Delta t}^2$$

relation qui s'applique à fortiori à tous les Instants du parcours de MM_1: J_x est donc l'accélération de la projection mobile m_1.

Théorème. – Si l'on projette sur un axe, par des plans parallèles à un plan directeur quelconque, les positions successives d'un point mobile dans l'espace, l'accélération du mouvement de la projection est la projection d'une quantité de même nature

qui est l'accélération Totale du point dans l'espace, et dont la direction et l'intensité ne dépendent que du mouvement du point, et nullement du système de projection.

Formule $J_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Corollaire I. – L'accélération Totale est la Résultante des trois accélérations correspondantes au mouvement Rectiligne des projections Coordonnées, sur 3 axes, du mobile considéré dans l'espace ; c.à.d. qu'elle est la diagonale d'un Parallélipipède, etc.

Corollaire II. – Si l'on projette Rectangulairement ou obliquement sur un plan les positions successives d'un point mobile dans l'espace, l'accélération Totale du mouvement Curviligne ou Rectiligne de la projection est égale à la projection sur le plan de l'accélération Totale dans l'Espace.

Projections ou composantes Rectangulaires, l'une Tangentielle, l'autre Normale, de l'accélération Totale.

1°. Soit $M_1V = v$, $M_1U = J\Delta t$, $M_1V_1 = v_1$. Soit α l'angle $N''MN'$ ou UMV de l'accélération J avec la Tangente ou avec la vitesse v_1. abaissant de U et de V_1 les perp. UW, V_1P sur la parallèle M_1V à la Tangente en M, on a $J\Delta t \cos\alpha = M_1W = VP = v_1 - v$ sauf une erreur négligeable à la Limite, car l'angle V_1M_1P devenant infiniment petit, la différence entre M_1V_1 et sa projection MP devient infiniment petite par rapport à l'infiniment petit VV_1 ou $J\Delta t$. Donc $J\cos\alpha = \frac{v_1 - v}{\Delta t}$, ou exactement, $J\cos\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. Donc fig (28)

Théorème. La projection Rectangulaire de l'accélération Totale sur la Tangente à la Trajectoire est égale à ce qui a été précédemᵗ appelé l'accélération Tangentielle.

Rem. Si l'on voulait définir l'accélération Tangentielle en

disant que c'est la projection rectangulaire sur la Tangente de l'accélération totale, ou, ce qui revient au même, l'accélé-ration du mouvement de la projection rectangulaire du mobile sur la Tangente, il résulterait de la démonstration précédente que l'accélération Tangentielle a pour expression $\frac{dv}{dt}$, qui est la limite de .. etc.

2°. On a (même fig. 28) $J\Delta t \sin\alpha = VW = V_1P = v_1 \sin\beta$ en appelant β l'angle V_1MV qui, devenant un infiniment petit $d\beta$, finit par se confondre avec son sinus. Donc

$$J\sin\alpha = \lim. \frac{v_1\beta}{\Delta t} = v\frac{d\beta}{dt} \quad \text{ou} \quad J\sin\alpha = v^2\frac{d\beta}{ds}$$

à cause de la relation $v = \frac{ds}{dt}$, dans laquelle ds est l'arc tel que MM_1 décrit dans le temps dt.

On sait que le quotient fini $\frac{d\beta}{ds}$ est ce qu'on appelle la Courbure en M de la courbe MM_1, et est égal à $\frac{1}{\rho}$. ainsi

$$J\sin\alpha = J\cos(J,\rho) = \frac{v^2}{\rho}.$$

Cette Composante de l'accélération Totale est appelée accélération Centripète, parce qu'elle est dirigée vers le Centre de Courbure. Donc

Théorème. L'accélération Centripète est égale au Carré de la Vitesse multiplié par la Courbure, ou divisé par le Rayon de Courbure.

Il résulte de la formule $J\sin\alpha = \frac{v^2}{\rho}$ que, lorsqu'on connaît pour un point M de la Trajectoire la vitesse v, l'accélération totale J, et son angle α avec la Tangente, on peut en conclure le Rayon de Courbure.

Dans le mouvement Curviligne Uniforme, l'accélé-ration Totale se réduit à l'accélération Centripète, puisque sa Composante Rectangulaire Tangentielle est nulle.

Mouvement Parabolique. — Si l'accélération Totale était constante, toujours parallèle à une même droite et

De même sens, la courbe décrite serait une parabole.

C'est une conséquence du 1er Th. de ce §.

Mouvement circulaire. — Le quotient $\frac{v}{\rho}$ est la vitesse angulaire, et si l'on désigne celle-ci par ω, l'accélération centripète est exprimée soit par $\frac{v^2}{\rho}$, soit par $\omega^2\rho$ ou par $v\omega$.

Projection orthogonale sur un plan d'un mouvement circulaire uniforme dans l'espace. — Rayon du cercle $= r$, vitesse angulaire du mobile $= \omega$, angle des deux plans $= i$. Les 2 axes de l'ellipse décrite par la projection du mobile sont $2r$ et $2r\cos i$. La vitesse aréolaire autour du centre du cercle étant constante, et égale à $\frac{1}{2}\omega r^2$, celle de la projection autour du centre de l'ellipse est constamment $\frac{1}{2}\omega r^2\cos i$. L'accélération totale du mouvement varié et périodique de cette projection est constamment dirigée vers le centre de l'ellipse, et égale à $\omega^2 r.\frac{\rho}{r} = \omega^2\rho$ si l'on désigne par ρ la distance variable du point mobile au centre de l'ellipse.

Si l'on fait $i = \frac{\pi}{2}$, en appelant x la distance de la projection du mobile au milieu de la projection du diamètre, on trouve $\omega^2 x$ pour l'accélération de vers ce milieu du mouvement rectiligne oscillatoire dont il s'agit, comme on aurait pu d'ailleurs le voir autrement.

---

etc. etc.

c'est fort intéressant à étudier, mais trop ennuyeux à copier.

Une Leçon de Mr. Bertrand

et

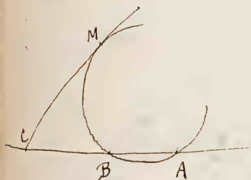
Quelques argumentations.

Exercices de troisième année
à l'Ecole Normale.

Leçon sur les Méthodes propres à Résoudre les problèmes de Géométrie Elémentaire.

Il n'existe pas de méthode Générale pour Résoudre les problèmes en Géométrie. D'abord, tous les problèmes ne sont pas susceptibles de Solution. Puis, s'il y avait des méthodes générales toujours applicables, il n'y aurait plus de Problèmes. ainsi l'on ne doit pas s'attendre à des Règles précises et certaines.

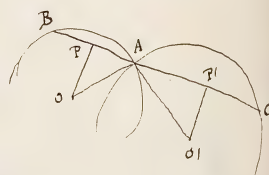
Il y a d'abord des problèmes qui se Résolvent immé-diatement sans aucune construction, pourvu qu'on connaisse assez bien les Enoncés des Théorèmes. Pour eux, il est évident qu'il n'y a aucune Règle à donner. — Par exemple : soient trois points A, B, C en ligne droite. Par les deux premiers je fais passer une circonférence qcq à laquelle je mène la tangente CM. Quel est le lieu des points M ? Il est évident que si l'on sait que $\overline{CM}^2 = CA \cdot CB$, on sait tout. — Si l'on deman-dait de construire la circonférence qui passe en A, en B, et qui touche CM, il n'y aurait encore aucune cons-truction à faire.



Si l'on voulait un triangle Equilatéral équivalent à un carré donné : cela ne diffère pas de la question de faire une figure semblable à une figure donnée et équivalente à une autre : question traitée dans les cours. Ce n'est pas vraiment un problème.

La plus méthode la plus ordinaire a quelque ana-

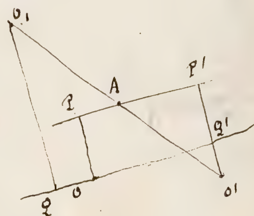
-logie avec cette méthode intuitive. Elle consiste à supposer le problème résolu ; construire une figure où il le soit ainsi représenté, et à examiner cette figure de manière à voir quelles sont les quantités qu'il faudrait connaître pour la pouvoir construire. Souvent ce ne sont pas directement celles que l'on cherchait. On transforme ainsi l'énoncé, et l'on arrive souvent à lui donner une forme plus simple ou celle d'un problème déjà connu. — Si les transforma-tions effectuées sont exactes, le second problème connu, on a traité le premier. — Si, dans la série de ces trans-formations, on rencontre une forme connue ou simple, le problème est résolu. — Cette méthode, très-naturelle, n'offre point de certitude d'arriver au résultat.



Ex. — On donne deux cercles. On veut mener par le point d'intersection une sécante telle que $\overline{BA}^2 - \overline{AC}^2 = m^2$.

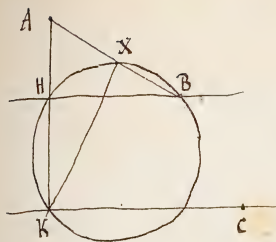
Supposons le problème résolu. On aura $\overline{AP}^2 - \overline{AP'}^2 = \frac{m^2}{4}$.

ou encore $\overline{oA}^2 - \overline{oP}^2 - (\overline{o'A}^2 - \overline{o'P'}^2) = \frac{m^2}{4}$ ou $\overline{o'P'}^2 - \overline{oP}^2 = k^2$.



Le problème est transformé en celui-ci : mener par A une droite telle que la différence des carrés de ses distances à deux points o' et o soit connue. — Mais $\overline{o'P'}^2 - \overline{oP}^2$ c'est $(o'P' + oP)(o'P' - oP)$. Soit $Ao_1 = Ao'$, oQ' perp. sur $o'P'$ et o_1Q perp. sur oQ'. On a $o'P' + oP = o_1Q$ et $o'P' - oP = o'Q'$. Donc le problème est ramené à celui-ci : faire passer par un point o une droite telle que le produit de ses distances à deux points o_1 et o' soit connu : c'est une nouvelle transforma-tion (faire touj. une fig. nouvelle à chaque transf. pour éviter la confusion). — Il est évident encore qu'il revient au même de mener par les points o_1 et o' deux

parallèles (entre elles et à QQ') telles que le produit de leurs distances au point O soit donné. — Supposons donc ce nouveau problème résolu : Imaginons un cercle passant par H, K, B. Le point X est facile à déterminer. Puis, XK est perp. sur AB. De plus l'angle AKC est droit. Donc le point K se détermine aisément. — D'où, en remontant, la solution du problème.



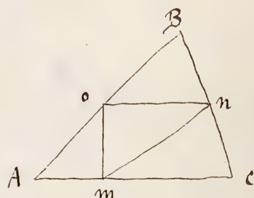
Telle est la méthode le plus généralement employée. Cependant elle est loin d'être la plus simple quand on ne lui adjoint pas le secours des autres méthodes.

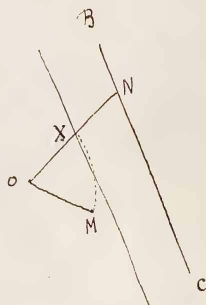
Une autre méthode est celle des Lieux Géométriques. Presque toujours un problème revient à déterminer un certain point de position, directement ou indirectem.t, ou plusieurs points. — En examinant avec soin l'énoncé du problème, et en analysant les conditions auxquelles doivent satisfaire les points cherchés, on voit que toujours ces conditions sont au nombre de deux (dans un plan). Il serait difficile d'en donner la démonstration sans recourir à la Géométrie analytique, mais il est facile d'en avoir de nombreux exemples. Le lieu des points satisfaisant à une condition donnée s'appelle un Lieu Géométrique. Ce lieu Géométrique est une ligne, et, dans les Éléments, on ne s'occupe que des lieux droits et circulaires. C'est une étude que l'on doit faire avant toute autre quand on veut résoudre des problèmes de Géométrie. — avec ces conditions, on peut résoudre un très-grand nombre de problèmes. — Car, si l'on en considère un certain nombre, on peut résoudre avec elles tous les problèmes ramenés à ce sujet.

-tir un point à deux d'entre elles. avec 40 conditions, on a $\frac{40.39}{2}$ problèmes résolus, et même davantage : car on peut combiner une condition avec elle-même.

Tous les problèmes peuvent se résoudre ainsi à la rigueur : mais il faut éliminer tous les problèmes qui exigeraient d'autres lieux que les lignes droites et circulaires : par ex : construire un triangle, connaissant la base, la hauteur, et la somme des deux autres côtés ; le dernier lieu n'est ici ni un cercle ni une ligne droite, la méthode des Lieux Géométriques ne s'applique pas.

Dans certains cas, on peut résoudre par la méthode des Lieux Géométriques des problèmes qui ne s'y prêtent pas du tout : on transforme alors préalablement l'Enon-cé. — Ex. — on donne un triangle ABC et un point o sur un des côtés AB : on veut inscrire au tri-angle ABC un autre triangle omn semblable à un triangle donné, et dont le point o soit un sommet. Cherchons le point m. Une première condition, c'est qu'il se trouve sur AC : voilà le 1er. lieu. — Soit N un point qcq. de BC et NOM un triangle semblable au demandé. Soit OX = OM. J'aurai $\frac{OX}{ON}$ = Const. donc le lieu des points X est une droite parallèle à BC. Puis, je fais tourner tous les rayons vecteurs de O aux dif-férents points de cette droite d'un angle constant = NOM : il est clair que cela revient à faire tourner la droite de cet angle. Cette droite, ainsi tournée, sera un second lieu Géométrique qui comprendra le point m.





ainsi, deux choses à faire : déterminer les deux problèmes de lieux Géométriques qu'il faut résoudre pour la question proposée ; puis, résoudre ces deux problèmes. Cette dernière

partie est très-facile quand on a fait beaucoup de problèmes.

Remarquons ceci au point de vue pratique. Dans un problème élémentaire, on peut penser que le problème proposé doit conduire à un cercle ou à une droite. Or il est facile de savoir à l'avance lequel des deux. Il faut se demander si les points du lieu doivent être enfermés dans des limites circonscrites, ou s'ils peuvent s'éloigner indéfiniment. Au moins cela peut-il presque toujours fournir une indication utile.

Ex. 1°. Lieu des points M tels que $OM \cdot OM' = K^2$. — c'est une droite.

2°. Lieu des points M tels que $\frac{OM}{OM'} = \frac{m}{n}$. — Ce ne peut être qu'un cercle. Sachant d'avance ce que ce doit être, on le vérifie facilement.

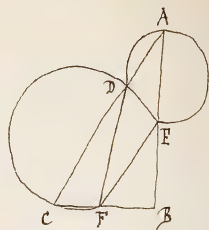
Cette méthode est très-utile. Elle donne une certitude que nulle autre ne présente.

Une autre consiste à construire, comme on le fait presque toujours, la figure à construire, et à se proposer de construire dans le plan une autre figure égale, mais non plus située au même lieu. On dégage ainsi les conditions de grandeur et de forme des conditions de position, ce qui donne plus de latitude. Ensuite, il n'y a plus qu'à remettre la figure en place.

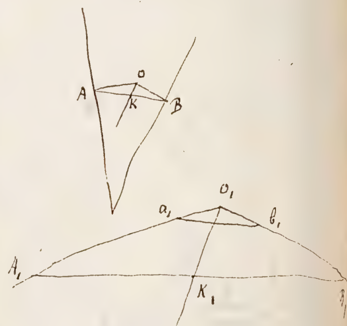
Ex. On donne un angle et un point sur la bissectrice. Mener par ce point une sécante de longueur donnée. — À part la position, cela revient à construire un triangle, connaissant la base, l'angle au sommet et la bissectrice SO. On résout ce problème séparément. On décrit le segm^t. capable. Puis soit IOS la bissectrice. $IO \cdot IS = IK \cdot IR$ = connu. Mais $IS - IO = OS$ = connu.

Donc on est ramené à un problème du troisième livre.

Autre Ex. Etant donné un triangle, lui inscrire un triangle équivalent = à un triangle donné. — On peut se proposer de circonscrire au contraire au triangle DEF un triangle égal au triangle ABC. Or cela est très facile. On décrit pour cela deux segments capables et il faut mener par D une sécante telle que CD + DA soit donné.

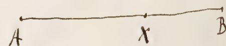


Autre Ex. Placer dans un angle une droite tellement donnée, tellement que si O est le point de rencontre des perpendiculaires en A et en B, la droite qui joint O au milieu de AB soit parallèle à une droite donnée. — Le triangle AOB peut être aisément construit. En un point O_1 qcq. je mène 3 parallèles à OA, OK, OB. En un point K_1 j'inscris A_1B_1 tel que $A_1K_1 = K_1B_1$. Puis je lui mène une parallèle a_1b_1 égale à AB, et mon triangle est construit.



Quelquefois enfin, au lieu de construire une figure égale à celle que l'on cherche, on construit une figure semblable. On ne s'occupe plus que de la forme.

Ex. Diviser une droite en moyenne et extrême raison. — On a $\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{XB}$. La figure à construire est composée de trois points en ligne droite. Donnons-nous AX. Alors, pour trouver B, j'ai



$\cancel{AX}$. $AB \cdot XB = \overline{AX}^2$ et $AB - XB = AX$. Cela revient à un problème connu. J'ai ainsi une ligne divisée en moyenne et extrême raison. Je n'ai plus qu'à partager AB proportionnellement.

Argumentation
Sur les quantités imaginaires.

Origine des quantités imaginaires. – Leur introduction pour pouvoir dire qu'une Eq. du 2^d. degré a toujours 2 racines.

La convention à l'aide de laquelle on introduit les quantités imaginaires dans le calcul est d'appliquer aux quantités imaginaires toutes les règles des quantités réelles. D'après cette convention, les puissances successives de $\sqrt{-1}$ sont -1, $-\sqrt{-1}$, $+1$, $\sqrt{-1}$ ...

Trouver que le produit de quantités imaginaires est une quantité imaginaire, et qu'on peut y intervertir l'ordre des facteurs. – Soit le produit $(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})$ .. ou bien $(\alpha+\beta i)(\alpha'+\beta' i)$ ... Si l'on fait le produit, on a un polynome en i, et indépendant de l'ordre des facteurs. Puis il faut remplacer i par $\sqrt{-1}$, i^2 par -1, i^3 par $-\sqrt{-1}$ et i^4 par $+1$. En faisant cette substitution dans deux polynômes identiques comme ceux qu'on obtient en changeant l'ordre des facteurs, on a toujours la même chose. Donc etc.

Peut-on donner immédiatem^t. un ex. de l'utilité de l'introduction des quantités imaginaires ? – Trouver que $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$ peut toujours être mis sous la forme p^2+q^2. Il n'y a qu'à intervertir l'ordre des quatre facteurs $(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})$. – Soient 1 α α^2 les 3 racines cubiques de 1. Formons $(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha)(a+b+c)$: c'est un produit réel et $=(a^2+b^2+c^2-[ab+bc+ac])(a+b+c)=a^3+b^3+c^3-abc.$ C'est ce qu'on appelle la norme de $(a+b+c)$: c'est

comme le module d'une quantité en Racines cubiques de 1). on peut démontrer que le produit de deux normes est une expression de même forme $A^3+B^3+C^3-ABC$. on considère le produit

$$(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha)(a+b+c)(a'+b'\alpha+c'\alpha^2)(a'+b'\alpha^2+c'\alpha)(a'+b'+c')$$

il est $\quad (a^3+b^3+c^3-abc)(a'^3+b'^3+c'^3-a'b'c')$

en changeant l'ordre des facteurs on peut obtenir 3 expression conjuguées qui donnent la même forme.

ainsi l'on peut arriver par les quantités imaginaires à trouver des théorèmes sur les quantités réelles.

Représentation trigonométrique des quantités imagi-naires : module et argument.

Enoncer le théorème de Moivre. démontrer la formule pour un multiple fractionnaire.

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\varphi+\sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}\varphi$$

Comment représenter une expression de la forme $\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi$ par des exponentielles ? la formule $\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi = e^{\varphi\sqrt{-1}}$ est une simple vérification. —

D'après cela, qu'est-ce que le Logarithme d'une quantité imaginaire ? $\mathcal{L}(\rho[\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi]) = \mathcal{L}(\rho\, e^{\varphi\sqrt{-1}})$. J'appelle ici Logarithme la somme $\mathcal{L}\rho+\varphi\sqrt{-1}$: elle est indéterminée : car je puis mettre pour φ toutes les valeurs qui ne changent pas $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. ainsi on a $\mathcal{L}[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)] = \mathcal{L}\rho+(\varphi+2n\pi)\sqrt{-1}$.

Qu'entendrait-on par $\cos(a+b\sqrt{-1})$? C'est le résultat de la substitution de $(a+b\sqrt{-1})$ pour x dans le développement de $\cos x$. on a

$$\cos(a+b\sqrt{-1}) = 1-\frac{(a+b\sqrt{-1})^2}{1.2}+\frac{(a+b\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4}-\dots$$

Ecrivons

$$\cos(a+b\sqrt{-1}) = \cos a\cos.b\sqrt{-1}-\sin a\sin.b\sqrt{-1}$$

a-t-on le droit d'appliquer cette formule d'après la définition de $\cos(a+b\sqrt{-1})$? oui, car on a identiquement en séries $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. ainsi il suffit de considérer $\cos . b\sqrt{-1}$ et $\sin . b\sqrt{-1}$.

$$\cos . b\sqrt{-1} = 1 + \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4} + \frac{b^6}{1.2\ldots6} + \cdots = \frac{1}{2}\left(e^b + e^{-b}\right)$$

$$\sin . b\sqrt{-1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^b - e^{-b}\right)$$

on aurait pu ne pas employer du tout les séries.

Dans le calcul intégral, y a-t-il des formules que l'on puisse généraliser au moyen des imaginaires ? — Considérons l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$. Elle est égale à $\frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^x \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}\,dx}{\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\,\mathcal{L}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{1+\frac{bx^2}{a}}\right)$. Supposons que $b = -b'^2$ et $a = a'^2$. Cette formule devient alors
$\frac{1}{b'\sqrt{-1}}\,\mathcal{L}\left(x\frac{b'}{a'}\sqrt{-1} + \sqrt{1-\frac{b'^2x^2}{a'^2}}\right) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a'^2-b'^2x^2}}$. on peut débarrasser le 1er membre d'imaginaires. Car on sait que $\mathcal{L}(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \mathcal{L}\rho + (\varphi+2n\pi)\sqrt{-1}$ et $\operatorname{Tg}\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$. Ici $\rho^2 = \frac{b'^2x^2}{a'^2} + 1 - \frac{b'^2x^2}{a'^2} = 1$, $\mathcal{L}\rho = 0$: et $\operatorname{Tg}\varphi = \frac{\sqrt{1-\frac{b'^2x^2}{a'^2}}}{\frac{b'x}{a'}}$ d'où $\varphi = \operatorname{arc}\sin\frac{b'x}{a'}$. Donc $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}\operatorname{arc}\sin\frac{bx}{a}$. C'est une manière de trouver cette intégrale.

Ces formules imaginaires peuvent être utiles dans certains cas quand elles servent comme d'intermédiaires dans des calculs ou des raisonnements, parce qu'elles sont plus générales que les formules où l'on a particularisé tous les signes des différentes quantités. Il peut se faire que cela évite beaucoup de calculs.

Mouvemt. d'un projectile dans un milieu résistant comme le carré de la vitesse. Pour le mouvement ascendant et pour le mouvement descendant, on a deux

formules. Cherchons à les faire coïncider. D'un côté $\varphi = g + \frac{gv^2}{k^2}$, de l'autre $\varphi = g - \frac{gv^2}{k^2}$. Il suffit de changer k en $k\sqrt{-1}$. Dans le mouvement ascendant on a $dt = \frac{k^2}{g}\frac{dv}{k^2-v^2} = \frac{k}{2g}\left(\frac{dv}{k+v} + \frac{dv}{k-v}\right)$ d'où $t = \frac{k}{2g} \mathcal{L}\frac{k+v}{k-v} + c$ et $\frac{k+v}{k-v} = e^{\frac{2gt}{k}-c}$ et enfin

$$\frac{v}{k} = \frac{e^{\frac{2gt}{k}-c} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}-c} + 1}$$

. Pour le mouvement descendant il faut remplacer k par $k\sqrt{-1}$. alors

$$v = k\sqrt{-1}\,\frac{e^{\frac{2gt}{k\sqrt{-1}}-c} - 1}{e^{\frac{2gt}{k\sqrt{-1}}-c} + 1} = k\sqrt{-1}\,\frac{e^{-\frac{2g(t+c)}{k}\sqrt{-1}} - 1}{e^{-\frac{2g(t+c)}{k}\sqrt{-1}} + 1}$$ en changeant la constante.

$$= k\sqrt{-1}\,\frac{-1 + \cos\frac{2g(t+c)}{k} - \sqrt{-1}\sin\frac{2g(t+c)}{k}}{1 + \cos\frac{2g(t+c)}{k} - \sqrt{-1}\sin\frac{2g(t+c)}{k}}$$

Il est facile à présent de faire disparaître les imaginaires et d'arriver à la formule qu'on eût trouvée directement en traitant le second problème.

Argumentation

Sur les Maxima et Minima des Fonctions.

Qu'appelle-t-on maximum d'une fonction ? — La véritable condition du maximum par ex. c'est que l'inégalité $f(a\pm h) < f(a)$ ait lieu pour toute valeur de h au-dessous d'une certaine limite fixe, qcq. du reste.

Condition analytique. $f'(a)$ nulle, infinie ou indéterminée. Rien de précis, sinon pour le premier cas. — Exception pour le cas où $f'(a)$ est indéterminé. Ex. $y = f(x) + (x-a)^2 \sin\frac{1}{x-a}$.

Rareté du cas où $f'(x) = \infty$ répond à un maximum ou un minimum. Il faut que la courbe $y = f(x)$ ait un point de Rebroussem^t. vertical.

Même dans le cas où $f'(x) = 0$, exception pour le cas où $f''(x)$ serait infini ou indéterminé : la Série de Taylor est en défaut.

Applications. Plus courte distance d'un point à une courbe dans un plan. — on cherche le maximum de $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$. on a donc $(x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0$

et, pour le maximum $$1 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} < 0$$

Donc il faut $$(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

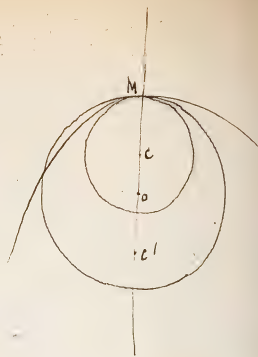
Supposons toujours $y > 0$. alors

Si $y > \beta$ il faut que la courbe soit concave

Si $y < \beta$ ——————————— convexe

ainsi, il faut toujours que le point soit dans la concavité. Mais cela ne suffit pas. Il faut que $(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} > 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$: on voit qu'il faut que les

point soit au-delà du centre de courbure. — on peut le démontrer géométriquement. Pour les points en c le cercle CM est tout entier intérieur, aucun cercle ne passant entre la courbe et le cercle osculateur. Donc il y a minimum. Pour les points en c' le cercle serait extérieur, il y a maximum. — Pour le point o lui-même, $f''(x) = 0$: rien si la courbe n'a point d'inflexion.



Fonctions de plusieurs variables. — Conditions analytiques. — Cas d'exception analogues.

Pour le cas de deux variables, il faut que le polynôme du second ordre ait les racines imaginaires : il faut $rt - s^2 < 0$ pour qu'il y ait maximum ou minimum.

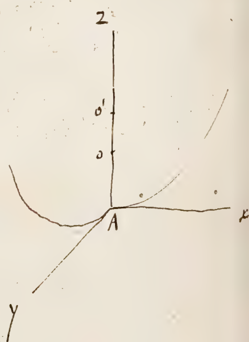
Traduction géométrique en considérant la surface $z = f(xy)$. Si $rt - s^2 > 0$ (les racines sont imaginaires) les deux courbures sont de même sens ; si $rt - s^2 < 0$ les deux courbures sont opposées : point de maximum possible. Si $rt - s^2 = 0$ dans une certaine direction (s'il y a des racines égales) il y a une courbure infinie dans une direction : il y a une section normale qui a un contact du second ordre avec sa tangente : il est possible qu'elle ait là un point d'inflexion, et qu'il n'y ait pas de maximum.

Application. Chercher sur la normale les points tels que leur distance à la surface soit maxima. — on aura $v = x^2 + y^2 + (z-\gamma)^2$. Les conditions sont

$$\frac{dv}{dx} = x + (z-\gamma)p = 0 \qquad \frac{dv}{dy} = y + (z-\gamma)q = 0 \qquad z = f(xy)$$

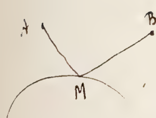
Il faut $\left(\frac{d^2v}{dxdy}\right)^2_A - \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_A \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right)_A < 0$ ou $\gamma^2 s^2 - (1-\gamma r)(1-\gamma t) < 0$

En prenant les sections principales dans les plans coordonnés, $s = 0$; et on a $\gamma^2 rt - \gamma(r+t) + 1 > 0$ ou

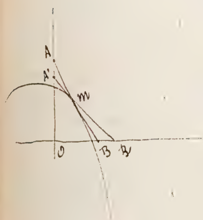


ou ~~$r^2 s^2$~~ $\cdot \left(\gamma - \frac{1}{r}\right)\left(\gamma - \frac{1}{t}\right) > 0$. Il faut que γ soit au-dessus de o ou au-dessous de o' pour qu'il y ait maximum ou minimum. — Il y aura maximum dans toutes les sections normales si le point est au-dessus de o. — Rien dans l'intervalle : f'' s'annulle.

Méthode géométrique pour trouver les maxima et minima. C'est toujours la même chose. on cherche la variation de la fonction et l'on exprime qu'elle doit être infiniment petite par rapport à la variation de la variable.



Trouver, étant donnés A et B, le point M tel que AM + MB soit minimum.



Trouver sur une courbe un point m tel que le triangle OAB soit maximum ou minimum. — Il faut que AA'm = BB'm. on a, à cause de l'angle égal mA . mA' = mB . mB'. Donc le point cherché est celui où mA = mB.

autre Ex. Les points d'une courbe où le rayon de courbure est maximum ou minimum sont ceux où le contact avec le cercle osculateur est ~~a~~ d'un ordre supérieur au second.

Argumentation

Sur les propriétés mécaniques des centres de gravité.

Ce que c'est que le centre de gravité d'un corps.

Qu'entend-on quand on dit qu'il suffit de fixer le centre de gravité d'un corps pesant pour mettre le corps en équilibre ? – Si le centre de gravité n'est pas un point de la masse du corps, cela est-il encore vrai ?

Centre de gravité d'un système non rigide.

Le centre de gravité est le plus haut ou le plus bas possible quand le système est en équilibre.

Mouvement du centre de gravité d'un système sollicité par des forces extérieures. – Le principe suppose qu'il n'y a aucun point fixé ni assujetti à se mouvoir sur une ligne ou sur une surface donnée. Le système doit être entièrement libre. Il faut que tous ses points puissent recevoir des déplacements égaux et parallèles dans toutes les directions. Alors on a les équations $\Sigma X = M \frac{d^2 x_1}{dt^2}$ ... etc.

Trouver qu'un point de masse M satisfaisant au même état initial que le centre de gravité et sollicité par les forces ΣX, ΣY, ΣZ, prend justement le mouvement du centre de gravité. Il y a lieu à démonstration parce que le centre de gravité peut être un point idéal qui n'est pas réellement sollicité par des forces. – Les deux points ne se quitteront pas : Il n'y a qu'à assujettir un point matériel de masse M à accompagner le centre de gravité : alors les forces seront ΣX, ΣY, ΣZ puisqu'elles sont $M \frac{d^2 x_1}{dt^2}$ ... et, comme je leur donne même état initial, il est clair qu'ils ne se sépareront pas.

Le mouvement du centre de gravité ne peut en général être déterminé séparément.

Lorsque le Système n'est pas libre, on peut le Regarder comme libre en introduisant la Résistance des obstacles.



ainsi par exemple supposons sur un plan horizontal un triangle mobile et un point pesant placé sur un des côtés. Le Système n'est pas libre. On peut le considérer comme libre en introduisant une force de bas en haut. Il est clair que le centre de Gravité se mouvra sur une verticale: car toutes les forces sont verticales: mais on ne peut avoir sa vitesse verticale.

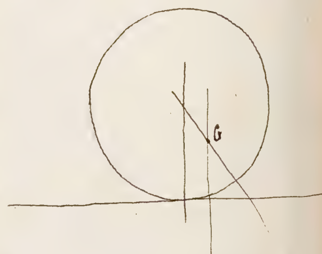
Supposons encore une roue pesante Roulant avec frottemt. sur un plan Incliné: cherchons la pression sur le plan. Les forces sont, au centre de Gravité, le poids mg, la force N et le frottement f. La force N n'a pas d'influence, puisqu'elle est perpend. au mouvemt. du centre de Gravité qui marche suivant une ligne parallèle au plan Incliné. Donc la Somme des composantes suivant N est nulle: $mg \sin \alpha - N = 0$. — Ceci n'est vrai que parce que la masse de la Roue étant centrée, son centre de Gravité décrit une ligne droite. Si la Roue avait un centre de Gravité Excentrique, il n'en serait plus de même: la pression alors ne serait plus toujours égale au poids. Il serait aisé de voir que la pression est alternativemt. plus grande et plus petite que le poids de la Roue.

Le principe du mouvemt. du centre de Gravité est utile en ce qu'il permet, pour avoir ce mouvement, de négliger toutes les forces qui résultent des actions des différentes parties du Système les unes sur les autres. ainsi, si l'on veut le mouvemt. d'un convoi de chemin de fer, il suffit de considérer les actions des Rails sur les

roues des wagons et de la machine, et de les transporter parallèlement à elles-mêmes: le mouvemt. du centre de gravité pourra être produit par elles. — Maintenant, comment se fait-il que le frottemt. qui est ordinairemt. une force retardatrice, est ici la force qui produit le mouvement? Les frottements des wagons retardent le mouvemt. Mais celui de la Locomotive est accélérateur. Le point m de cette la roue de cette Locomotive a un mouvemt. en arrière, et le frottemt. est donc une force dirigée en avant. Cela tient à ce que la Machine donne à la roue une vitesse plus grande que la vitesse de translation. Pour les wagons, où la vitesse n'est pas plus grande, le frottemt. n'aide plus: au contraire.



Trouver le mouvemt. du centre de gravité d'un cercle hétérogène posé sur une horizontale. — Il est clair que le centre de gravité ne sortira pas de la même verticale (en supposant qu'il n'y ait pas d'impulsion initiale). La pression ne sera pas toujours égale au poids du cercle.



Dans le mouvemt. d'un système, on peut avoir le mouvemt. de rotation autour du centre de gravité comme si ce centre était fixe et que les forces extérieures restassent les mêmes. — Démonstration d'après le principe de d'alembert. — Il faut remarquer que les équations de liaisons du nouveau système ne sont pas les mêmes que celles de l'ancien.

Comme exemple supposons deux masses pesantes qui s'attirent en raison inverse du carré de la distance. — Si l'on veut le mouvemt. du centre de gravité, ce centre décrit une parabole suivant la loi connue. De plus le second principe doit donner le

mouvement des deux masses autour du centre de gravité. — Les deux masses sont assujetties à se trouver en ligne droite avec l'origine (mobile, au centre de gr.) et à conserver un rapport de distances tel que leur centre de gravité reste à l'origine. Tout-à-l'heure nous n'avions pas de liaisons, maintenant nous en avons de très-compliquées. — au reste, ici cela ne gêne pas. On a

$$mx + m'x' = 0$$

$$my + m'y' = 0$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$

Si l'on suppose qu'au commencement le centre de gravité fût à l'origine, et qu'on eût

$$m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = 0$$

cette condition sera toujours satisfaite : car le centre de gravité sera toujours fixe dans tout le mouvemt. ainsi ces conditions sont toujours satisfaites d'elles-mêmes : et les deux masses se mouvront absolument comme s'il n'y avait pas de liaisons : chacune décrira une Ellipse, comme quand elles étaient libres.

Supposons encore un plan incliné et une boule homogène pesante, en supposant un frottemt. tel qu'elle roule sans glisser. on demande la pression, la loi du mouvemt. et l'intensité du frottemt.



on a $$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha - f$$

de plus le mouvemt. de rotation se fait comme si G était fixe. Ici la pesanteur et la résistance normale du plan sont détruites : il ne reste que f. En général on a $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\Sigma Pp}{\Sigma mr^2}$: on a donc $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{fr}{mk^2}$.

Maintenant on a $\frac{dx}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$, puisqu'il n'y a pas glissemt.

Donc $\frac{d^2x}{dt^2} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$, et l'on a $mr\frac{d^2\theta}{dt^2} = mg\sin\alpha - f$

Eliminant f, il vient

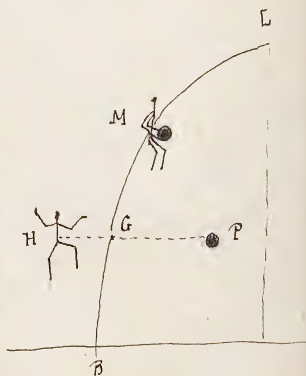
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{r}{mk^2}\left(mg\sin\alpha - mr\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \text{Const}.$$

c'est un mouvement de Rotation uniformém^t. accéléré : et le mouvem^t. de Translation aussi.

Pour que cela ait lieu, il faut que f soit < le frottem^t. de glissem^t, $F \times$ pression, ou $f < F . mg\sin\alpha$, F étant le coefficient de frottem^t. Comme on peut tirer la valeur de $f = \frac{mk^2}{r} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$, en Remplaçant $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ par sa valeur, on aura une inégalité à laquelle devront satisfaire F et l'angle α.

Supposons un homme sautant. Son centre de Gravité décrit une parabole. arrivé en M, il voit qu'il ne s'éloigne pas assez de la verticale L. Il tient un poids. Peut-il s'en servir pour tomber plus loin ou moins loin que B ? — Comme le centre de Gravité doit toujours Rester sur la parabole, il est clair que s'il jette le poids du côté de la verticale L, il devra, lui, se trouver plus loin de la verticale, pour que le centre de gravité Reste toujours sur la parabole.



---

argumentation
Sur les forces vives.

Force vive d'un point. – d'un Système. Eq. des forces vives $d(mv^2) = 2(Xdx + Ydy + Zdz) = 2Pdp$ dans le mouvement d'un point.

on ne peut faire l'intégration que lorsque le second membre sera une différentielle exacte : c.à.d. qu'il est toujours une différ. exacte, mais seulemt. quand x y z ont été remplacés en fonction du temps : seulemt. dans certains cas il peut arriver que cette expression soit une différentielle exacte soit de toutes les variables, soit d'un certain nombre d'entre elles après qu'on a éliminé les autres. alors on peut obtenir mv^2 en fonction de x, y, z.

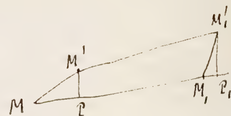
Théorèmes sur les surfaces de niveau.

Suffit-il qu'il existe une série de surfaces normales aux forces X, Y, Z à chaque instant pour que le principe des forces vives soit applicable ? Car cela n'a pas toujours lieu. – Non, car cela donne & seulement $X = m\frac{d\varphi}{dx}$ --- alors $Xdx + Ydy + Zdz = m\left(\frac{d\varphi}{dx}dx + \cdots\right)$ n'est pas nécessairemt. différentielle exacte. – Condition nécessaire. Il faut que la distance de deux surfaces infinimt. voisines soit en raison inverse de la valeur correspondante de la force $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$. – Cas où le point ne reprendrait pas la même force vive en revenant à la même surface de niveau.

Y a-t-il qq. cas généraux où $(Xdx + \cdots)$ est une diffé-

-rentielle exacte ? — Celui où les forces sont dirigées vers des centres fixes et ne sont fonction que de la distance. Peut-on vérifier d'après le caractère géométrique donné plus haut ?

Forces vives d'un système. — Eq. et principe des forces vives. — Il n'est pas vrai de dire que la force vive du système ne dépend pas des actions mutuelles : cela n'est vrai que si les distances des points agissants restent invariables : quand la distance de deux points diminue et qu'ils exercent l'un sur l'autre une action fonction de la distance, par ex. attractive, leur force vive augmente. — En effet soient M et M_1. Ils passent en M', M'_1. Le travail de M est $F.MP$, celui de M_1 est $F.M_1P_1$. Donc la quantité totale est $F(MP - M_1P_1)$. or $M'M'_1 = PP_1$ en ne négligeant que des infin. petits du second ordre. Donc la quantité de travail effective est Fdr : c'est ce que nous disions : si $dr > 0$, elle est négative ; si $dr < 0$, elle est positive.



Supposons deux mobiles pesants M, M', placés sur une tige inflexible, assujettis à tourner d'un mouvem^t. donné autour d'un de ses points. Le principe des forces vives est-il applicable ? Il ne l'est point : car il y a des forces produites par les liaisons, et ces liaisons dépendent du temps : ici, les forces de résistance de la tige en dépendent, et par conséquent le principe n'est pas applicable. Il le serait si la tige était seulement regardée comme pesante, et devait se mouvoir en vertu de la pesanteur sans avoir de mouvem^t. donné.

Stabilité de l'Equilibre. — Comment se rattache la stabilité de l'équilibre au principe des forces vives ?

après la théorie de l'accroissement. de force vive d'un point matériel, on peut donner cet exemple.

Supposons que sur un terrain mou on fasse tomber des billes de même diamètre, et tombant de hauteurs différentes. (même diamètre afin qu'il y ait même résistance). Elles pénètreront à des profondeurs plus ou moins grandes. on demande de les calculer. — La profondeur sera proportionnelle à la force vive. quand la bille s'est arrêtée, il faut que le sol ait exercé une force capable d'anéantir sa vitesse, de faire passer sa force vive de sa valeur à zéro. Donc, en négligeant la pesanteur pendant l'enfoncement, force très-petite, la seule force qui ait agi est $\int F df$, F est la force de résistance du sol. Donc $\int F df = \frac{mv^2}{2}$. Or, pour toutes les billes la résistance est la même. Donc, si l'on peut regarder F comme constante pendant toute la durée de l'enfoncement. on voit que f serait proportionnel à $\frac{mv^2}{2}$. Et c'est ce qui est approximativement vrai. C'est dans ce sens que l'on peut dire que la force vive que développe un corps tombant est proportionnelle à sa force vive.

Descartes avait pensé que la puissance d'un corps en mouvement était proportionnelle à sa quantité de mouvement mv. Il est vrai que l'on a bien $mv = \int F dt$ pour chaque bille quand elle s'est arrêtée : mais, pour deux billes enfoncées, on ne sait pas si les deux phénomènes se sont passés dans le même temps, et si F est le même dans les deux cas à toute époque. Il faudrait que les deux billes se fussent enfoncées dans

le même temps pour que l'opinion de Descartes fût exacte.

La question serait : que faut-il pour que deux billes s'enfoncent d'égales quantités ?

à l'occasion du principe des forces vives dans les systèmes, on pourrait dire ceci :

Le frottement de roulement agit pour retarder le mouvement. ainsi, supposons une roue qui roule : le plan incliné exerce un certain frottement : mais ce frottemt. ne produit pas de travail résistant puisque le point o est en repos à chaque instant : donc le travail f.dp serait nul. — Cependant la roue qui tombe avec un frottemt. de roulement tombe moins vite que si celui-ci n'existait pas. — Le frottemt. de roulement ne diminue pas la somme des forces vives ; — mais cette somme se compose de celle correspondante au mouvement de translation, plus celle correspondante au mouvemt. de rotation autour du centre de gravité. — Mais, s'il n'y avait pas de frottemt. de roulemt., il n'y aurait pas de roulemt. donc réellemt. le frottemt. de roulemt., en produisant cette rotation, diminue la vitesse, puisqu'il détourne une partie de la force vive qui, sans cela, aurait produit une augmentation de vitesse dans la translation, seule chose utile.

Dans le mouvemt. d'un convoi, la force accélératrice est le frottemt. des roues de la locomotive. Mais le frottement des roues des wagons est retardateur. Ce frottemt. qui produit l'avancemt. des wagons produit cependant un travail négatif : il diminue la somme des forces vives du système.

C'est vrai : sans cela, les forces vives auraient une somme plus grande : mais le système resterait en place : ainsi ici cette force qui diminue les forces vives produit cependant

un effet utile. C'est la machine qui répare cette perte à chaque instant, aussi bien que celle provenant du frottem^t. des essieux, etc. Mais il faut éviter que la roue de la Locomotive ne tourne trop vite; car une fois qu'il y a glissem^t. que la roue tourne plus ou moins vite, le frottement ne développe pas une force plus grande: il n'y a donc pas avantage à ce qu'elle tourne plus vite. Il faut que le mécanicien s'arrange pour que la vitesse de la roue soit à-peu près celle de translation du convoi. Elle peut même être un peu au-dessous: alors c'est un frottement de roulement, lequel peut avoir toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à la force du frottement de glissement. Pour savoir quelle valeur il a dans l'expérience que l'on fait, il n'y a qu'à introduire la vitesse de translation connue, et écrire qu'il y a roulem^t. (vide supra). alors la roue n'agit plus pour entraîner le convoi, qui marche par l'impulsion acquise. Seulement, lorsque la vitesse aura diminué un peu, elle agira pour réparer cette perte et ranimer la vitesse.

Programme à suivre dans une telle argumentation,

Définition de la force vive. — L'accroissem^t. infinim^t. petit de force vive est égal au double du travail développé par la force qui agit sur le point. — $d.mv^2 = 2(Xdx+Ydy+Zdz)$. Les forces normales au mouvem^t. n'ont pas d'influence. Cas où $(Xdx + --)$ est une différentielle exacte. — Expression géométrique de la condition nécessaire pour que cela ait lieu. — Cas singulier où le mobile, partant d'une surface de niveau, peut revenir à la même surface sans y reprendre la même vitesse. — Si des billes de même diamètre, mais de masses différentes, tombent sur un sol mou,

dans quel rapport seront les profondeurs auxquelles elles s'en-fonceront ?

L'accroissemt. de force vive d'un système qcq. est égal à la somme des quantités de travail développées par les forces qui agissent sur lui. — on peut ne pas tenir compte des forces de liaison, pourvu qu'elles soient indépendantes du temps. — Qu'appelle-t-on dans une machine travail moteur et travail résistant ? — Ils sont égaux quand le mouvemt. est uniforme. — Le frottemt. produit toujours du travail résistant. — Montrer que cela a lieu même dans les locomotives où le frottemt. produit cependt. le mouvemt. utile du système. — Impossibilité du mouvemt. perpétuel avec des actions fonction de la distance.

La somme des forces vives d'un système est égale à la force vive de la masse transportée au centre de gravité, plus les forces vives dues au mouvemt. autour de ce centre. — Le frottemt. de roulemt. ne produit pas de travail : il ne change donc pas la somme des forces vives : mais il retarde le mouvemt. en absorbant une partie de la force vive par la rotation des roues.

Stabilité de l'équilibre quand la somme des forces vives est maxima par rapport à la valeur qu'elle peut avoir pour toutes les positions voisines du système, mais non pour les instants infinimt. voisins.

Argumentation
sur les principes de l'Hydrostatique.

Principes fondamentaux d'Expérience. — Démonstration de l'Egalité de pression dans tous les sens, autour d'un point.

Etablissement des Equations Générales d'Equilibre.

Est-il toujours possible, étant données des forces qui sollicitent un liquide, de trouver un Etat d'Equilibre? Ce n'est pas : il faut que $\rho(Xdx + Ydy + Zdz)$ soit une Différentielle Exacte. — Si ρ n'est pas constant, on l'élimine entre les trois relations, et l'on a une Equation qui est la condition d'intégrabilité de l'Equation $Xdx + Ydy + Zdz = 0$. — Si ρ est une fonction de p, la condition est toujours que $(Xdx + \ldots)$ soit différentielle Exacte.

Ces Equations Générales sont nécessaires, mais elles ne sont pas suffisantes toujours (Puiseux). — à ceci on peut faire une objection. on suppose dans le principe que la pression est normale à l'Elément. or c'est ce qui n'a pas lieu ici. nous avons un frottem.t entre les différents filets, mais nous n'avons pas une pression normale. Les Equations Générales ne sont pas réellement applicables.

Tout ce qu'il y a à dire là-dessus, c'est qu'en effet on n'a jamais démontré que les Equations fussent suffisantes.

Dans l'intérieur d'une masse liquide en Equilibre, dont on suppose une portion solidifiée, les forces qui la sollicitent font Equilibre aux forces intérieures, si les 3 conditions sont satisfaites. Vérifier que les 6 Equations d'Equi.

-libre ont lieu entre ces forces.

Qu'appelle-t-on surfaces de niveau dans un liquide? Comment sont-elles placées par rapport aux forces?

Cas des fluides compressibles. – on a de plus $p = k\rho$. Quelle est la valeur de k? – on a, pour la pression sur l'unité de surface, $p = 0^m,76 \times 13,000^k$, 13000^k étant le poids de $1^{m.c.}$ de mercure. – $\rho = \frac{1,3}{g}$, $1^k,3$ est le poids de $1^{m.c.}$ d'air et g est le poids de l'unité de masse. Donc $0,76 . 13000 = k\frac{1,3}{g}$, d'où k.

Calculer la pression sur une surface. on trouve $b g \rho h$. Réduire en nombres. Il faut remplacer ρ, en supposant de l'eau distillée, par $\frac{1000^k}{g}$: 1000^k est le poids de l'unité de volume d'eau.

Argumentation

Sur le principe des vitesses virtuelles et sur le Pr. de D'alembert.

Qu'appelle-t-on vitesse virtuelle d'un point et moment virtuel d'une force ? — Si plusieurs forces sollicitent un point, le moment virtuel de la résultante est égal à la somme des moments virtuels des composantes. — Il en résulte les conditions d'équilibre d'un point libre : s'il est en équilibre, la somme des moments virtuels est nulle, et réciproquement. — Cas d'un point non entièrement libre, assujetti à rester sur une courbe fixe, sur une surface fixe.

Comment démontre-t-on le principe des vitesses virtuelles dans le cas d'un système qcq ? — on admet deux choses non démontrées : savoir, que si un système est en équilibre, il y reste quand on ajoute des liaisons ; et ensuite : que si un système est soumis à des liaisons exprimées par des équations $L = 0$, $M = 0$, ... les conditions d'équilibre restent les mêmes quels que soient les moyens physiques par lesquels on réalise ces liaisons : Il faut nécessairement admettre cette espèce d'axiome, sur lequel est basée toute la mécanique. C'est nécessaire pour pouvoir faire abstraction des complications spéciales qu'offrent dans chaque cas les circonstances où l'on se trouve. — Quand on dit qu'on ajoute au système à liaisons incomplètes des liaisons qui ne permettent qu'un seul des déplacements virtuels de tout-à-l'heure, on entend un déplacement géométrique, c.à.d. que dans ce déplacement, les rapports des variations des coordonnées sont déter.

-minés, mais leurs grandeurs ne le sont point : si des liaisons permettent des déplacements δx, δy,... elles permettent aussi des déplacements $2\delta x$, $2\delta y$,... Il faut que les rapports des vitesses soient les mêmes.

On peut peut-être rendre plus clair cet axiome : que l'on peut aux équations $L=0$, $M=0$,..., substituer des courbes ou des surfaces fixes. Supposons que les forces se fassent équilibre. Les liaisons nouvelles n'empêchent pas l'équilibre. S'il y a mouvement, ces liaisons nouvelles permettent le mouvement tel qu'il a lieu : elles ne le gênent pas. Ainsi l'introduction de tiges et de courbes ne peut pas changer ni l'état de mouvement ni l'état d'équilibre du système. — Cela nous prouve que je puis remplacer l'ancien système par un autre où les nouvelles liaisons se superposent sur les anciennes. — Maintenant nous pouvons supprimer les anciennes liaisons ; puisque tout mouvement ancien reste possible et qu'aucun mouvement nouveau ne le devient : Donc ces anciennes liaisons ne servaient plus à rien. — Au reste tout cela n'est pas beaucoup plus clair que d'admettre le principe lui-même comme un axiome évident à priori.

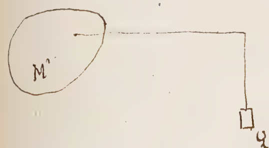
Comment se sert-on du principe des vitesses virtuelles pour établir les conditions d'équilibre d'un système qcq ? — Théorème sur les forces dont l'introduction peut remplacer l'action des liaisons.

Énoncer le principe de d'Alembert. — Le démontrer.

Sur un point A les liaisons développent pendant le mouvement certaines forces R qui détruisent les forces P et les forces — Q : Maintenant, les forces R

proviennent des liaisons: elles peuvent n'être pas les mêmes dans toutes circonstances. La vitesse des points du système exerce une influence. — Est-il vrai de dire que si l'on sollicitait le système en repos par les forces P et −Q, il y aurait encore équilibre? Les liaisons développeraient-elles encore les forces R? Cela n'est pas évident: cependant cela est nécessaire pour qu'on puisse dire que les forces P et −Q se font équilibre sur le système en repos: et c'est là ce qui fait le principe de d'Alembert. Un système en repos peut développer des résistances toute différentes. — Quand on prend le système en repos on n'est peut-être plus en droit de regarder les forces de liaisons comme les mêmes. — Il faut dire que puisque ces forces R peuvent naître d'après les liaisons et mettre le système en équilibre, elles naîtront effectivem^t. c'est une espèce d'axiome.

Comme application:



Supposons dans un plan horizontal un système de points entraînés par un poids vertical: le point d'attache du fil étant assujetti à se mouvoir en ligne droite. Il faut bien faire attention que, si l'on se sert toujours du principe de d'Alembert, on évite autant qu'il est possible l'emploi du principe des vitesses virtuelles pour le mettre en équation. On ne s'en sert que lorsque le système est assez compliqué pour qu'on ne puisse pas voir tout de suite les conditions d'équilibre entre les forces motrices et les forces effectives prises en sens contraires: l'emploi du principe des

vitesses virtuelles ne facilite en rien la connaissance de ces dernières forces (les forces effectives), qu'il faut toujours en définitive obtenir.

Argumentation
Sur la Théorie de la courbure des Surfaces.

Quels sont les Théorèmes Relatifs à la courbure des Sections planes passant par un même point ? — Théorème de Meunier. — Courbure des Sections normales. Formule $\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\varphi}{R} + \frac{\sin^2\varphi}{R'}$. — Combien de paramètres variables dans l'expression de la courbure des Sections en un point ? — Il faut connaître le plan tangent, ce qui comporte deux éléments p et q : puis il faut connaître R et R' et la direction des Sections principales : ainsi, cinq conditions numériques.

Quelles sont, entre les diverses Surfaces, les différences qui pourront être manifestées par les signes des Rayons de courbure ?

Comment Représente-t-on ce Résultat au moyen de l'indicatrice ? comment l'indicatrice peut-elle indiquer la variation du Rayon de courbure ? Ce qui distingue le cas où R et R' sont de même signe de celui où ils sont de signes contraires.

Ces Résultats sont-ils sujets à quelques Exceptions ? on suppose que p, q, r, s, t ne dépendent pas de φ, et cela peut arriver.

Le Théorème de Meunier n'est pas sujet à cette Exception. cependant il en comporte aussi. ainsi, si l'on suppose une courbe tournant autour d'une de ses tangentes en changeant de forme : alors il est clair que, pour les Sections faites suivant cette Tangente, les courbures ne sont plus assujetties au Théorème

de Meunier: tout est arbitraire. L'exception tient à ce qu'il n'y a pas de plan tangent en M : et la démonstration en suppose l'existence.

Qu'est-ce qui caractérise les normales à une même surface? C'est qu'elles forment deux séries de surfaces développables se coupant à angle droit. Ces surfaces coupent les surfaces normales suivant les lignes de courbure.

Sur les surfaces de révolution, quelles sont les lignes de courbure? Pour les surfaces développables, les génératrices et les trajectoires orthogonales. — Pour les surfaces canaux, les cercles caractéristiques et leurs trajectoires orthogonales.

Prouver que les normales à une même surface forment deux séries de surfaces développables : c'est la même chose que de prouver l'existence des lignes de courbure.

En général, si l'on considère un système de droites partant des différents points d'une surface, elles font deux systèmes de surfaces développables, mais non orthogonales.

Démontrer géométriquem^t. le théorème de Meunier.

Démontrer que si une ligne de courbure est plane, son plan fait un angle constant avec la surface. On prend ce plan pour plan des xy. alors, pour les points de cette ligne de courb. on a $dz=0$. et l'Éq. général : $\frac{dx+p\,dz}{dp} = \frac{dy+q\,dz}{dq}$ devient $\frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dq}$. et $dz = p\,dx + q\,dy$ donne $p\,dx + q\,dy = 0$. on a $p\,dp + q\,dq = 0$ $p^2+q^2 = \text{Const}$. d'où $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}} = \text{Const}$. Donc $\angle z$ —

Argumentation
Sur l'Equilibre d'un fil.

Quelles sont les propriétés qu'on suppose au fil dans la Théorie de l'Equilibre et du mouvement de ce corps? — on suppose le fil inextensible.

Prouver que, quand un fil est sollicité par des forces agissant à ses extrémités, il doit prendre une forme rectiligne pour l'Equilibre. — D'abord il faut que les forces soient égales et opposées, puisqu'on peut solidifier le système, l'Equilibre établi, sans le rompre. ainsi le fil ne peut avoir que la forme AB. Mais maintenant l'action d'une portion du fil sur la portion consécutive doit être dirigée suivant la tangente: donc &c.

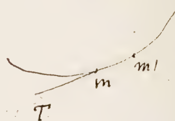


Peut-on prouver que l'action d'une portion du fil sur la portion voisine est dirigée suivant la tangente? on peut l'admettre comme postulatum, et cela vaut peut-être mieux: mais on peut le démontrer. D'abord on peut considérer le fil comme un polygone d'un très-grand nombre de côtés, en isolant par la pensée les molécules matérielles qui doivent le composer: mais cette raison ne serait peut-être pas bien reçue: elle soulève des questions de mécanique moléculaire qui ne sont pas fort claires. Puis il y a la démonstration de Mr. Sturm. Il vaut mieux dire qu'on l'admettrait volontiers, mais qu'on peut le démontrer de cette manière. — (On peut remarquer que, dans cette démonstration, il est inutile de faire des difficultés on admet l'existence d'une position d'Equilibre.

si on l'accepte, il est donc inutile de faire des difficultés pour savoir si les Equations d'Equilibre sont suffisantes).

Démontrer les Equations d'Equilibre d'un fil sollicité par des forces quelconques. — Qu'est-ce que les quantités X, Y, Z? qu'est-ce que la force en un point?

Formule $dT + (Xdx + Ydy + Zdz) = 0$ — Pourrait-on la démontrer directement sur la figure? — $\left(X\frac{dx}{ds}ds + Y\frac{dy}{ds}ds + \cdots\right)$ est la composante tangentielle de la force : si mm' est en équilibre, projetons toutes les forces sur la tangente. on a alors $dT + \left(X ds \frac{dx}{ds} + \cdots\right) = 0$ ou $dT + (Xdx + \cdots) = 0$.



Si la composante normale est dirigée suivant la normale principale, dans le sens opposé au rayon de courbure : son expression est $\frac{T\,ds}{\rho}$.

Si l'on tend un fil sur une surface, quelle figure prendra-t-il s'il n'est sollicité que par deux forces à ses deux extrémités? — Calculer la pression qu'il exerce en chaque point.

Supposons une courbe plane et un fil appliqué sur elle et tendu par deux forces à ses extrémités. Le fil sera sollicité en chaque élément par une force $\frac{P\,ds}{\rho}$ dirigée suivant la normale, et, à ses deux extrémités, par deux forces P. Vérifier par les Equations Générales d'Equilibre que l'Equilibre existe, si ces conditions sont remplies. On a deux Equations $\int \frac{P\,ds}{\rho} \cos\lambda + P(\sin\lambda_0 - \sin\lambda_1)$ qui sont des identités. Puis on a l'Equation des moments.

Est-il certain qu'on aura Equilibre quand les Equations Générales $d.T\frac{dx}{ds} + \cdots = 0$ — seront satisfaites? — Cela n'est pas démontré. On n'a écrit que trois des Equations de l'Equilibre de l'Elément du fil, Elément qu'on

supposé déjà solidifié. — ainsi il y a à craindre qu'elles ne soient pas suffisantes pour l'Equilibre. — Réponse. D'abord, pour les trois autres Equations des moments, on peut les déduire des trois Equations déjà écrites. Maintenant, on voit qu'il ne peut y avoir d'autre position d'Equilibre que celle qui répond à ces Equations : or l'expérience prouve qu'il y a une position d'Equilibre : donc... Enfin, le principe des vitesses virtuelles redonne les mêmes Equations en tenant compte de la condition $\delta ds = 0$. De là on peut conclure que les Equations sont suffisantes.

Exemples de la Théorie des chainettes. — Chainette d'Egale Résistance. on suppose un fil pesant, mais de densité variable, c.a.d. de Résistance variable. on demande quelle forme il doit affecter pour présenter partout les mêmes chances de Rupture sous l'influence de la pesanteur. ainsi, la condition est $T = a\rho$; ρ étant la densité, ou la Section. on a alors, en prenant l'axe des y vertical.

$$T\frac{dx}{ds} = C \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + g\rho\, ds = 0$$

. Cette 2de. Equation devient

$$d\left(C\frac{dy}{dx}\right) + \frac{g}{a}T\,ds = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{g}{a}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{g}{a} = 0$$

on pose $\frac{dy}{dx} = p$: alors $\frac{dp}{dx} + \frac{g}{a}(p^2+1) = 0 \qquad x = \frac{g}{a}\,\text{arc tg}\, p$

Donc $p = \text{Tg}\,\frac{ax}{g}$. ainsi $dy = \text{Tg}\,\frac{ax}{g}\cdot dx$, $-y = \frac{g}{a}\,L.\frac{1}{b}\cos\frac{ax}{g}$.

$\cos\frac{ax}{g} = b\,e^{-\frac{ay}{g}} \qquad e^{\frac{ay}{g}}\cos\frac{ax}{g} = b$. Telle est l'Equation.

On peut toujours intégrer si l'on suppose que la force qui sollicite les Eléments du fil soit toujours dirigée vers un point fixe. — On prend ce point pour origine des coordonnées. alors on a $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$. Des

trois équations d'équilibre on déduit très-facilement que la courbe est plane : — En remarquant que $Yx - Xy = 0$ etc. et appliquant le même procédé que dans le principe des aires, on a

$$T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = C \qquad T\left(x\frac{dz}{ds} - z\frac{dx}{ds}\right) = C'$$

d'où

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dz - z\,dx} = \frac{C}{C'} \quad \text{ou bien} \quad y - \frac{C}{C'}z = C''x$$

équation d'un plan. Ainsi la courbe est plane. — En ne gardant que la première équation et faisant $x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = r^2\frac{d\theta}{ds}$ en coordonnées polaires on a $Tr^2\frac{d\theta}{ds} = C$. Mais la 2e. équation est $dT + (X dx + ..) = 0$ ou $dT + R\,dr = 0$, qui donne T en fonction de R et r. Alors, en substituant dans la 1re. équation, la question se ramène toujours aux quadratures. — Les calculs peuvent s'effectuer complètement dans le cas de l'attraction en raison inverse du carré de la distance.

Il faut remarquer que, quelle que soit la loi de la force R, quand on suppose que le centre d'attraction s'éloigne indéfiniment, on doit trouver l'Eq. d'une chaînette ordinaire, en supposant que R ne devient pas nul, mais tend vers une limite g.

---

argumentation
sur le mouvement d'un point.

Formules du mouvem^t. rectiligne. — qu'est-ce que la vitesse ? — la vitesse moyenne ? — la force accélératrice ?

Formules du mouvem^t. curviligne : leur démonstration.

Comme application : un point décrit un cercle d'un mouvement uniforme. quelle est la force qui le sollicite ?

Décomposition de la force en force tangentielle et force centripète. — Pourrait-on démontrer directement que la force est dans le plan osculateur à la courbe ? dans un temps infinim^t. petit θ, la force fait sortir le point M du plan de la tangente et de la position de la force au commencem^t. de cet instant. Elle le ferait s'en éloigner d'une quantité $MI = v\theta^2$: mais c'est là une quantité du troisième ordre. Donc etc.

M I

Pression produite par un point et mouvem^t. sur une courbe. Le point, se mouvant sur une courbe donnée, peut-on déterminer la pression $\frac{mv^2}{\rho}$; c.à.d. peut-on déterminer v par de simples quadratures ? — C'est le principe des forces vives. — on a $d.v^2 = Xdx + Ydy + Zdz$ et ici y et z sont connus en fonction d'x.

Comme application, supposons un fil d'une résistance de 10^k. on lui suspend un poids de 1^k. et on le fait tourner d'un mouvement uniforme : quelle doit être la vitesse pour qu'il arrive à rompre, sa longueur étant de 1^m. — Ici $m = \frac{1}{g}$. on a

$\frac{v^2}{g} - mg\sin\theta = R$. Il faut $R = 10$. ainsi $\frac{v^2}{g} - \sin\theta = 10$ d'où $v^2 = (10+\sin\theta)g$. comme on n'a pas spécifié l'endroit où le fil doit être rompu, on prend $\sin\theta = -1$ et l'on a $v = \sqrt{9g}$.

Un point pesant tombant sur un cercle et se mettant à glisser sur lui, à quel moment le quitterait-il? on a $mv^2 = 2gh$, $\frac{2gh}{r} = g\sin\alpha - R$, $R = g\sin\alpha - \frac{2gh}{r}$ R ne peut devenir négatif. Le point quittera quand $R = 0$. donc $g\sin\alpha - \frac{2gh}{r} = 0$, $\sin\alpha - \frac{2h}{r} = 0$, $\sin\alpha = \frac{2h}{r}$.

Argumentation
Sur la Théorie des Maxima et des Minima.

Qu'entend-on par Max. ou Min. de $f(x)$? — C'est que l'on peut assigner une valeur finie de h telle que, pour toutes les valeurs inférieures, on ait $f(a+h)-f(h)$ ayant un signe constant, $h \gtrless 0$.

Et pour les fonctions de plusieurs variables ?

Comment reconnaît-on que $f(x)$ est max. ou min. — Distinction des deux cas. (Série de Taylor).

Interprétation géométrique de ces résultats sur la courbe $y=f(x)$.

Rem. — Il arrive souvent qu'on cherche à rendre max. ou min. certaines quantités géom. dont on n'a pas ou dont on ne veut pas se donner la peine de calculer l'expression analytique. Il y a un théorème qui guide presque toujours dans ces recherches géométriques. C'est que : Lorsqu'une grandeur passe par un max. ou un min., si l'on fait varier la variable indépendante, la variation de la fonction est un infiniment petit d'ordre supérieur. — Démonstration de ce Th. C'est le même que suprà. mais il était important de l'énoncer sous cette forme.

Avant de passer aux fonct. de plus. variables, qq. applicat.

Trouver la dist. max. ou min. d'un point à une courbe.

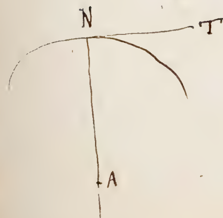
$y=f(x)$. — $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\delta^2$

$$(x-\alpha)dx+(y-\beta)dy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-\alpha}{y-\beta}$$

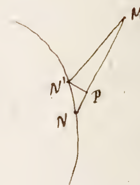
Donc cette $\gtrless$ dist. est normale à la courbe. — Comment distinguer s'il y a max. ou min ? — on différentie encore :

$$1+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \lesseqgtr 0$$



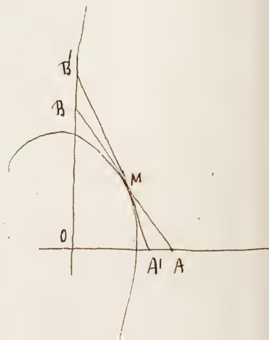
Cette inégalité s'interprète géométriquement : — Quel que soit le point A que l'on considère sur une même normale AN, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ restent les mêmes. Donc, selon que le

point A sera pris dans une certaine région de AN ou dans une autre, il y aura max. ou min. Ces deux régions de la droite AN sont séparées par un point pour lequel on a $1 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$: c'est précisément le centre de courbure. — ainsi, de N en C, c'est un min. De C jusqu'à l'infini, c'est un max.



On peut retrouver tout cela géométriquement. Soit MN la ≥ dist. N' un point voisin. MN − MN' = 0. or MN − MN' = NP = NN' sin N'. Donc l'angle N' doit être infinim^t. petit, c.à.d. que MN doit être normale à la courbe.

Inversement, nous allons vérifier par l'analyse un résultat fourni par la géométrie.



Soit une courbe dans un angle droit. Quelle tangente AB détache un triangle OAB minimum ?

Évidem^t. on devra avoir triangle OAB = OA'B'

ou BMB' = AMA'

Donc MB . MB' = MA . MA', d'où MB = MA.

Il y a une autre solution : car la différence OA'B'−OAB peut être infinim^t. petite du second ordre autrem^t. que par l'égalité OA'B' = OAB. Il suffit pour cela que chaque triangle MBB' et MAA' soit inf. petit du 2^d ordre : pour cela, que l'angle en M soit du 2^d. ordre, c.à.d. qu'il y ait un point d'inflexion en M. — Enfin on aura encore une sorte de solution évidente avec une tangente passant par l'origine.

Par l'analyse. — Éq. de la tg^te. $y-\beta = (x-\alpha) f'(x)$

L'aire du triangle OAB $= \frac{1}{2} OA . OB = \frac{1}{2}(y - x f'(x))\left(x - \frac{y}{f'(x)}\right)$

Égalant la dérivée à zéro, on trouve

$$-x^2 f''(x) + \frac{y^2 f''(x)}{f'(x)^2} = 0$$

2 solutions : $f''(x) = 0$: inflexion. — ou bien

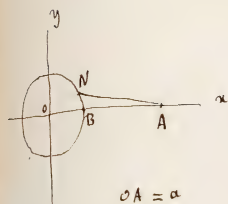
$$-x^2 + \frac{y^2}{f''(x)^2} = 0$$

d'où

$$\frac{y}{x} = \pm f'(x)$$

Si $\frac{y}{x} = f'(x)$ on a la tangente passant par l'origine.
Si $\frac{y}{x} = -f'(x)$, il est facile d'en conclure $MA = MB$.

Il y a un cas particulier du problème I qu'il est bon d'examiner : c'est même important. Cherchons la < dist. d'un point A et un cercle.



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\overline{AN}^2 = (x-a)^2 + y^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = R^2 - 2ax + a^2$$

Egalant la dérivée à zéro

$$-2a = 0$$

on ne trouve rien, ni maximum ni minimum. Pourquoi cette singularité ? car il y a évidemt. une solution. Il y a là une remarque générale à faire qui doit indiquer quand se présenteront des exceptions analogues à celles-ci. c'est que l'on a choisi une variable indépendante qui ne peut pas prendre toutes les valeurs possibles, et est susceptible elle-même d'une valeur max. et d'une min. ainsi, en général, quand la variable indépendante ne pourra pas ainsi prendre une valeur qcq. il peut se faire qu'à la valeur max. ou min. de la variable indép. corresponde précisémt. un max. ou min. de la fonction qui ne satisfasse pas aux conditions ordinaires.

Fonctions de deux variables. — $\frac{df}{dx} = 0$ $\frac{df}{dy} = 0$. Ces conditions ne sont pas suffisantes. — Il faut que l'ensemble des termes du 2e. ordre ne puisse pas changer de signe : le trinôme $Ah^2 + Ck^2 + Bhk$ doit garder un signe constant. — Donc l'éq. $A\frac{h^2}{k^2} + B\frac{h}{k} + C = 0$ ne doit avoir que des racines imaginaires ; $\frac{h}{k}$ étant qcq. Donc il faut que $B^2 - 4AC \leqq 0$. Cette condition est commune aux max. et min. — Si $B^2 - 4AC > 0$ il n'y a ni max. ni min. — Si $B^2 - 4AC = 0$, le trinôme garde bien toujours le même signe, mais il

il y a une valeur de $\frac{h}{k}$ pour laquelle il s'annule. alors les termes du 3e ordre donnent leur signe : il faut donc qu'ils se réduisent à zéro pour cette valeur du rapport $\frac{h}{k}$, et qu'alors les termes du 4e ordre aient un signe convenable.

Interprétation géométrique sur les surfaces. — Le plan Tg. doit être parallèle à xoy. — L'inégalité $B^2-4AC<0$ signifie que les deux rayons de courbure sont de même sens, et $B^2-4AC>0$ qu'ils sont de sens contraire (car on a $B^2-4AC=s^2-rt$).

Fonctions de 3 variables. — Rapidement. Enoncés seuls. on arrive à un polynôme $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F$ qui doit garder un signe const. qq. soient x et y. Comment exprime-t-on cette condition ?

Peut-il y avoir des cas d'exception aux règles précédentes ? des max. ou min. qui n'y satisfassent pas ?
Fonctions d'une variable : $\frac{df}{dx}=\infty$, rebroussement.

" de plusieurs variables : il peut y avoir max. ou min. parce que $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$ sont indéterminés, il n'y a pas de plan tangent. Ce cas ne se présente pas pour une seule variable. — Ex. Problème assez remarquable. On a 3 points. En trouver un 4e. dont la somme des distances aux trois autres soit minimum. — $(\alpha\beta)$ $(\alpha'\beta')$ $(\alpha''\beta'')$ les 3 points.

$$D=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}+\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2}+\sqrt{(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2}$$

La $\frac{df}{dx}=0$:

$$\frac{x-\alpha}{\sqrt{\ }_1}+\frac{x-\alpha'}{\sqrt{\ }_2}+\frac{x-\alpha''}{\sqrt{\ }_3}=0$$

ceci n'est que

$$\cos\gamma+\cos\gamma'+\cos\gamma''=0$$

(angles des droites AM, AM', AM'' avec ox).

de même $\left(\frac{df}{dy}=0\right)$

$$\sin\gamma+\sin\gamma'+\sin\gamma''=0$$

d'où

$$(\cos\gamma+\cos\gamma')^2=\cos^2\gamma''=1-\sin^2\gamma''=1-(\sin\gamma+\sin\gamma')^2$$

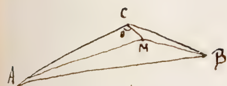
$$(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)+(\cos^2\gamma'+\sin^2\gamma')+2\cos\gamma\cos\gamma'+2\sin\gamma\sin\gamma'=1$$

$$\cos(\gamma-\gamma')=-\frac{1}{2}$$

$$\gamma - \gamma' = 120°$$

Donc l'angle ~~AMAM~~ ~~=120°~~. Donc $MAM' = 120°$. Donc le point A est à l'intersect. de 3 segments capables de 120°. Telle est la solution générale.

Or il y a une autre solution, et cela se voit par la géométrie. — Car si l'un des angles du triangle est $> 120°$, les 3 segments ne se coupent pas : et cependant il est absurde d'admettre qu'il n'y a pas un point dont la somme des distances aux 3 sommets soit minimum. A quoi cela tient-il ? justement à ce que les 2 dérivées que nous avons égalées à zéro peuvent devenir indéterminées : il suffit pour cela que le point A coïncide avec un des sommets du triangle $MM'M''$. Donc un de ces sommets sera alors la solution, puisqu'il y en a certainem^t. une. — Evidem^t. ce sera le sommet où aboutissent les deux plus petits côtés.



On peut vérifier géométriquement cette solution.

$$\Delta = AC + CB - MA - MB - MC$$

$$AC - AM = MC \cos\theta$$

$$CB - BM = MC \cos(C-\theta)$$

$$\Delta = MC \left\{ \cos\theta + \cos(C-\theta) \right\} - MC$$

Δ doit ~~être du 2e. ordre~~. ~~ou~~ garder un signe constant. Donc aussi

$$\cos\theta + \cos(C-\theta) - 1$$

~~doit être du premier~~. or cette expression peut s'écrire

$$2 \cos\frac{C}{2} \cos\left(\frac{C}{2} - \theta\right) - 1$$

ou encore

$$2 \left\{ \cos\frac{C}{2} \cos\left(\frac{C}{2} - \theta\right) - \frac{1}{2} \right\}$$

or, $C > 120°$, donc $\frac{C}{2} > 60°$, d'où $\cos\frac{C}{2} < \frac{1}{2}$. D'ailleurs la valeur absolue de $\frac{C}{2} - \theta$ est toujours inférieure à 90° : Donc $\cos\left(\frac{C}{2} - \theta\right)$ est > 0 et ≤ 1. Donc enfin la partie entre crochets garde un signe constant, c.q.f.d.

277.

Quelques Extraits du Journal de Gergonne.

Développement des fonctions circulaires en produits indéfinis.

On sait que l'on a

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots \end{aligned}\right\} (1)$$

1°. Si une quantité A mise à la place de x dans un de ces seconds membres, l'annulle, il sera divisible par $1 - \frac{x}{A}$; 2°. Réciproquement. aucun binôme $1 - \frac{x}{A}$ ne sera facteur si $x = A$ n'annulle pas la série.

Donc il suffit de chercher les valeurs de x qui annullent les seconds membres.

Mais il est plus commode et il revient au même de chercher celles qui annullent les premiers. – or on sait que, pour que $\sin x$ et $\cos x$ soient nuls, il faut et suffit que l'on ait

$$x = \pm k\pi \qquad \text{ou} \qquad x = \pm\frac{(2k-1)\pi}{2}$$

ce qui revient à

$$1 \mp \frac{x}{k\pi} = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 \mp \frac{2x}{(2k-1)\pi} = 0$$

k positif q.c.q. – on peut donc affirmer que les facteurs binômes de la série

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots$$

sont tous ceux de la forme $1 \mp \frac{x}{k\pi}$ qu'il est possible de former en attribuant à k toutes les valeurs entières et

positives imaginables ; — et que les facteurs binômes de la Série

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

résultent de même de la formule $1 \mp \frac{2x}{(2k-1)\pi}$.

Mais à quelle puissance entrent ces Binômes ?

D'abord, aucun d'eux n'a un exposant négatif. Car en s'annulant il rendrait alors Sin x ou Cos x infini. Il n'est pas non plus fractionnaire positif : car alors à un même arc répondraient plusieurs sinus ou cosinus, ou autrem.t la Série, qui n'a qu'une valeur unique pour chaque valeur de x en prendrait plusieurs lorsqu'elle serait mise sous forme de produit de facteurs (vu que $M^{\frac{p}{q}}$ a plusieurs valeurs). — Enfin, aucun n'est affecté d'un exposant entier positif supérieur à 1. Car alors, comme Sin x et Cos x sont, au signe près, les dérivées l'un de l'autre, il s'ensuivrait (Théorie des Racines Egales) qu'une même valeur de x annullerait en même temps Sin x et Cos x ce qui est impossible. (ou encore : si un facteur entrait à la puissance p dans Sin x, il entrerait donc à la puissance p-1 dans Cos x, donc seulem.t à la puiss. p-2 dans Sin x, ce qui est absurde).

On aura donc, en faisant les produits des deux facteurs qui répondent à une même valeur de k, produits qui sont

$$1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}$$

on aura, dis-je,

$$\begin{cases} \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\dots \\ \cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\dots \end{cases}$$

Soit fait d'abord, dans ces deux formules, $x = \frac{m\pi}{2n}$.
Elles deviendront

(2) $$\begin{cases} \text{Sin.}\frac{m}{2n}\pi = \frac{m\pi}{2n}\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{36n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{64n^2}\right)\cdots \\ \text{Cos.}\frac{m}{2n}\pi = \left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{25n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{49n^2}\right)\cdots \end{cases}$$

En y faisant au contraire $x = \frac{1}{2}\pi - \frac{m\pi}{2n}$, remarquant qu'alors le sinus se change en un cosinus et inversem^t^, et transposant les formules, on aura

(3) $$\begin{cases} \text{Sin.}\frac{m}{2n}\pi = \left(1-\frac{(n-m)^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{(n-m)^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{(n-m)^2}{25n^2}\right)\cdots \\ \text{Cos.}\frac{m}{2n}\pi = \frac{(n-m)\pi}{2n}\left(1-\frac{(n-m)^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{(n-m)^2}{16n^2}\right)\left(1-\frac{(n-m)^2}{36n^2}\right)\cdots \end{cases}$$

Décomposant, dans les deux premières formules (2) les facteurs du second degré en facteurs du premier, et réduisant de plus, dans chaque facteur, l'entier et la fraction en une seule fraction, il viendra

(4) $$\begin{cases} \text{Sin.}\frac{m}{2n}\pi = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\frac{2n+m}{2n}\cdot\frac{4n-m}{4n}\cdot\frac{4n+m}{4n}\cdot\frac{6n-m}{6n}\cdot\frac{6n+m}{6n}\cdots \\ \text{Cos.}\frac{m}{2n}\pi = \frac{n-m}{n}\cdot\frac{n+m}{n}\cdot\frac{3n-m}{3n}\cdot\frac{3n+m}{3n}\cdot\frac{5n-m}{5n}\cdot\frac{5n+m}{5n}\cdot\frac{7n-m}{7n}\cdot\frac{7n+m}{7n}\cdots \end{cases}$$

Opérant de même sur les formules (3) on a

(5) $$\begin{cases} \text{Sin.}\frac{m}{2n}\pi = \frac{m}{n}\cdot\frac{2n-m}{n}\cdot\frac{2n+m}{3n}\cdot\frac{4n-m}{3n}\cdot\frac{4n+m}{5n}\cdot\frac{6n-m}{5n}\cdot\frac{6n+m}{7n}\cdots \\ \text{Cos.}\frac{m}{2n}\pi = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-m}{n}\cdot\frac{n+m}{2n}\cdot\frac{3n-m}{2n}\cdot\frac{3n+m}{4n}\cdot\frac{5n-m}{4n}\cdot\frac{5n+m}{6n}\cdots \end{cases}$$

Divisant alors l'une par l'autre les deux expressions soit de $\text{Sin}\frac{m}{2n}\pi$ soit de $\text{Cos}\frac{m}{2n}\pi$ on a

$$\pi = 2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdots$$

qui est la formule de Wallis.

(Gergonne 1810)

Problème d'analyse.

Trouver l'équation la plus générale des courbes planes qui jouissent de cette propriété, que toutes celles de leurs cordes dont la direction passe par un certain point du plan sont une longueur donnée et constante.

(c'est là une des deux propriétés caractéristiques des diamètres du cercle).

Soit P le point donné, et $2r$ la longueur constante des cordes. Soit A une courbe qcq. Soit mené par P une suite de droites D coupant A en des points C. Enfin, de chaque point C comme centre, avec un rayon r, soit décrit un cercle. Chacun de ces cercles coupera la droite D correspondante en deux points M et N : et tous les points M et N seront sur les deux branches d'une courbe unique qui satisfera aux conditions voulues.

Supposons l'origine en P. Soit

$$y = f(x)$$

l'Eq. génér. de A. — L'équat. générale des droites D sera

$$y = \alpha x$$

α étant une indéterminée.

On obtiendra les équations des points C en combinant les deux équations $y = f(x)$ $y = \alpha x$. D'où l'on conclura d'abord $f(x) = \alpha x$. — Si l'on suppose que cette équation, résolue par rapport à x, donne

~~...~~ $x = \varphi(\alpha)$, les points C auront pour Equat.

$$x = \varphi(\alpha) \qquad y = \alpha\,\varphi(\alpha)$$

Les cercles qui auront ces points pour centres et r pour Rayon auront donc pour Eq. Générale :

$$\left[x - \varphi(\alpha)\right]^2 + \left[y - \alpha\,\varphi(\alpha)\right]^2 = r^2$$

en sorte que la combinaison de cette Equation avec l'Eq. $y = \alpha x$ fera connaître les points M et N qui Répondent à chaque valeur de α.

Si donc on élimine α entre ces deux Equations, l'Eq. résultante sera celle du lieu des points M et N : donc l'Equation

$$\left[x - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right]^2 + \left[y - \frac{y}{x}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right]^2 = r^2$$

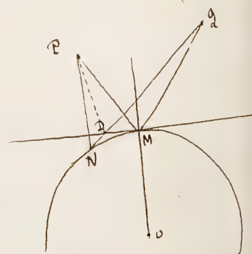
est l'Eq. générale demandée, φ étant une fonction arbitraire.

Solution de quelques problèmes.

Lemme I. — Le point d'une droite donnée dont la somme des distances à deux points donnés, d'un même côté de cette droite, est la plus petite, est celui duquel menant des droites aux deux points donnés, ces droites font, de différents côtés, des angles égaux avec la droite donnée.

Démonstration facile.

Lemme II. — Si, sur une circonférence donnée, il y a un point M duquel menant des droites à deux points donnés P et Q, ces droites, sans couper le cercle, fassent des angles égaux avec le rayon mené au même point, la somme PM + QM sera minimum.

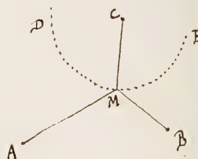


Car

$$PM + QM < PD + QD$$
$$< PN + NQ$$

c.q.f.d.

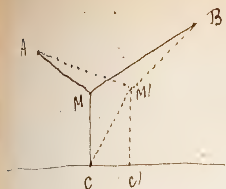
Problème I. — Déterminer un point dont la somme des distances à 3 points donnés soit la moindre possible.



Soient A, B, C les 3 points donnés, M le point cherché. — Du point C par ex. avec CM pour rayon décrivons l'arc DME. — Si l'on connaissait déjà CM, il faudrait trouver sur l'arc DME un point M tel que MA + MB = minim: ce qui exigerait que les angles AMC et BMC fussent égaux.

Donc les 3 angles en M doivent être égaux. D'où la construction, avec des segments capables de 120°.

Problème II. — Déterminer un point dont la somme des distances à deux points et à une droite



soit minima.

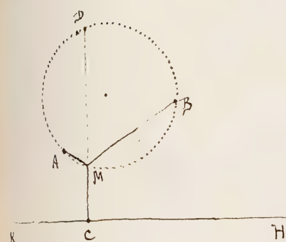
Les 3 angles en M sont égaux. Car sinon on aurait un point M' pour lequel les trois angles AM'B, AM'C, BM'C seraient égaux : et alors

$$M'A + M'B + M'C' < M'A + M'B + M'C$$

Mais (Probl. I) $M'A + M'B + M'C < MA + MB + MC$

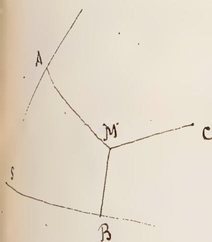
Donc $M'A + M'B + M'C' < MA + MB + MC$

contrairement à l'Hypothèse. Donc ...



D'où la construction : AMB, arc capable de 120°. D, milieu de l'arc ADB, DC perp. de D sur KH.

Problème III. — Déterminer un point dont la somme des distances à un point et à deux droites données soit minima.



On verrait facilement que les 3 angles en M doivent être égaux. — Donc AMB = 120°. Mais d'ailleurs AMB = 180° − S. Donc le problème ne sera possible que si S = 60°. et alors il sera indéterminé : on pourra prendre pour M tout point de la parallèle menée par C à la bissectrice de S.

Problème IV. — Déterminer un point dont la somme des distances à trois droites données soit minima.

On verra comme tout à l'heure que le problème est impossible si les 3 droites ne forment pas un triangle équilatéral : — cas auquel le problème devient indéterminé.

Problème V. — Déterminer un point dont la somme des distances à deux points et à une circonférence donnée soit minima.

Il est clair qu'on peut substituer à la circonférence

son centre lui-même : et l'on retombe sur le Problème I.

Problème VI. Déterminer un point dont la somme des distances à un point, à une droite, et à une circonférence données soit minima.

Même Remarque. - on ramène au probl. II.

Problème VII. - Déterminer un point dont la somme des distances à deux droites et à une circonférence données soit minima.

Même Remarque. - Mêmes circonstances qu'au Probl. III.

Problème VIII. - Déterminer un point dont la somme des distances à un point et à deux circonf. soit minima.

Même Rem. - c'est le Probl. I.

Problème IX. - Déterminer un point dont la somme des distances à une droite et à deux circonférences soit minima.

Id. - c'est le problème II.

Problème X. - Déterminer un point dont la somme des distances à 3 circ. soit minima.

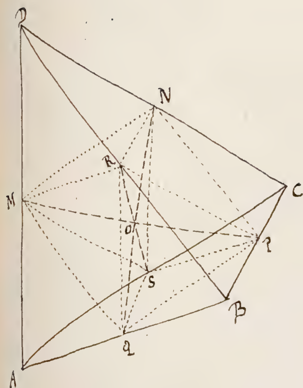
Id. - C'est encore le Probl. I.

Problème XI. - Lier des points donnés, en nombre qcq. par un système de droites dont la longueur totale soit minima.

Il est facile de s'assurer 1°. qu'à chacun des points donnés il n'aboutit qu'une des droites cherchées ; 2°. que ces droites se réunissent au nombre de 3 seulement en leurs points de concours, et y font des angles égaux. D'où la construction : - s'il y a n points, on en remplace deux par le milieu de l'arc capable de 120°.

Sur les propriétés du tétraèdre.

Th.- Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés et ceux des deux diagonales passent toutes trois par le même point, où elles sont coupées en deux parties égales.



Cela est évident : il ne s'agit que d'examiner attentivement la figure ; et de remarquer que MRPS et NRQS sont deux parallélogrammes.

Il suit de là que

Dans tout tétraèdre, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés passent toutes trois par un même point, qui est leur milieu commun.

Il est facile de voir que

Le point où se coupent les droites qui joignent les milieux des 6 arêtes opposées d'un tétraèdre est son centre de gravité.

J'appellerai axes d'un tétraèdre les 3 droites qui joignent les milieux de ses arêtes opposées. – Leur point de rencontre sera le centre du tétraèdre. – Les 3 plans conduits par les axes, pris deux à deux, seront les plans principaux, et détermineront, dans le tétraèdre, les sections principales, lesquelles seront des parallélogrammes ayant les axes pour diagonales et ayant, pour les deux côtés d'un même angle, des parallèles aux deux arêtes opposées du tétraèdre que le plan de la section ne rencontre pas. – Chaque plan principal partage le tétraèdre en deux troncs de prismes triangulaires que nous

devront être équivalents.

Deux arêtes opposées du tétraèdre, n'étant pas dans un même plan, peuvent toujours, et d'une manière unique, être comprises dans deux plans parallèles. Le plan principal qui passe par les milieux des 4 autres arêtes est parallèle à ceux-là, et en est équi-distant.

Le système des six plans, parallèles deux à deux, qui contient les arêtes opposées d'un tétraèdre, forme le parallélipipède circonscrit. Les diagonales non parallèles des faces opposées de ce parallélipipède sont les arêtes opposées du tétraèdre ; les droites qui joignent les centres des faces opposées du parallélipipède en sont les axes ; enfin les plans menés par le centre du parallélip. (qui est aussi le centre du tétr.) parallèlemt. à ses faces opposées, déterminent les sections principales du tétraèdre.

Si deux arêtes opposées d'un tétraèdre sont égales, les faces du parallél. circonscrit qui comprendront ces arêtes seront rectangulaires : si, dans le tétr. il y a 2 couples d'arêtes opposées égales, chacune à chacune, deux couples de faces opposées du parall. circonscrit seront rectangulaires : enfin si les arêtes opposées sont toutes égales deux à deux, le parallélip. circonscrit sera rectangulaire.

De là il est facile de conclure que

Dans un tétraèdre, deux des axes sont perpend. entre eux, ou l'un des axes est à la fois perp. aux deux autres, ou enfin les trois axes sont perp. deux à deux suivant que ce tétraèdre a un, deux ou trois couples d'arêtes opposées égales.

Lorsqu'on fait passer des plans par les extrémités des axes du tétraèdre, ces plans déterminent un octaèdre

inscrit. Les 4 tétraèdres excédants sont égaux et superposables, car ils sont terminés par des faces égales chacune à chacune et rangées dans le même ordre. Chacun de ces tétraèdre est le $\frac{1}{4}$ du grand tétraèdre dont il fait partie, car il lui est semblable et a ses arêtes moitié des siennes. D'où il suit que le volume total de ces 4 tétraèdre est moitié de celui du grand tétraèdre, et qu'ainsi celui de l'octaèdre inscrit en est aussi moitié.

Chacun des plans principaux partage l'octaèdre en deux parties équivalentes : car ces deux parties sont des pyramides quadrangulaires ayant base commune et ayant leurs sommets sur des plans parallèles à celui de leur base et également éloignés de part et d'autre de ce plan.

Il résulte de là que

Chacun des plans principaux d'un tétraèdre le partage en deux troncs de prismes triangulaires équivalents. — Car chacun de ces troncs de prismes est composé d'une moitié de l'octaèdre et de deux des tétraèdres excédants.

Il en résulte encore que le produit de l'aire de chacune des sections principales du tétraèdre par la plus courte distance entre les arêtes opposées parallèles à cette section est une quantité constante pour un même tétraèdre, quelle que soit celle des 3 sections principales que l'on considère : les $\frac{2}{3}$ de ce produit exprimant le volume du tétraèdre. Donc celle des 3 sections principales dont l'aire est la plus petite est celle dont le plan est parallèle aux arêtes opposées les plus distantes.

Les 3 plans principaux du tétraèdre divisent l'octaèdre inscrit en 8 tétraèdres équivalents et symétriques deux à

deux : puis donc que leur somme est la même que celle des 4 tétraèdres ex-inscrits, on en doit conclure que chacun de ces derniers est double de chacun de ceux qui résultent de la division de l'octaèdre par les plans principaux. D'où il suit encore que les droites qui joignent le centre du tétraèdre à ses sommets sont coupées par les faces de l'octaèdre inscrit au tiers de leur longueur.

Les quatre tétraèdres excédants peuvent être considérés comme un même tétraèdre appliqué successivement à l'octaèdre par chacune de ses faces, lesquelles deviennent ainsi 4 des 8 triangles qui terminent cet octaèdre. Ces 4 triangles ne sont pas égaux en général, mais chacun d'eux a son égal sur la face opposée de l'octaèdre : celui-ci reste à découvert et fait partie de la surface du tétraèdre total. Si l'on enlève les 4 tétraèdres excédants pour les transporter sur celles des faces de l'octaèdre qui en premier lieu étaient à découvert, ces tétraèdres, ainsi disposés, formeront avec l'octaèdre le tétraèdre conjugué du tétraèdre primitif, ayant cet octaèdre pour sa partie commune avec lui. Les deux tétraèdres conjugués seront inscrits au même parallélipipède ; leurs douze arêtes seront les diagonales de ses faces, et leurs sommets correspondants seront les sommets de ses angles opposés.

Deux tétraèdres conjugués forment un système symétrique relativement à leur centre commun : car toute droite qui y passe, se terminant à des faces ou arêtes parallèles, a son milieu en ce point. Un plan qcq. passant par le centre divise d'abord l'octaèdre en deux parties symétriques, et rencontre ensuite les tétraèdres excédants sur les arêtes homologues, à des

distances égales de leurs sommets. Le système est donc divisé par ce plan, en deux parties égales et symétriques. Les sections principales sont les mêmes pour les deux tétraèdres conjugués parce qu'elles ne rencontrent pas les tétraèdres excédants. Enfin les sections passant par une arête de l'un des tétraèdres passent par l'arête correspondante de son conjugué, et sont figurées par deux triangles égaux et renversés.

Si, par les extrémités de la plus courte distance entre les arêtes opposées de l'un des tétraèdres et par leur centre commun on conduit des droites, elles se termineront aux arêtes correspondantes de son conjugué. La droite qui joindra les points de rencontre sera donc égale et parallèle à cette plus courte distance; elle sera donc, comme elle, perp. à deux faces opposées du parallélipipède circonscrit, et sera ainsi la plus courte distance des arêtes du conjugué auxquelles elle se terminera.

Si l'on conduit un plan par l'arête BD et le milieu S de l'arête opposée AC, le triangle BSD donnera $2(\overline{BS}^2+\overline{DS}^2) = \overline{BD}^2 + 4\overline{RS}^2$. — Mais les deux triangles ABC, ADC donnent $2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AD}^2) = 2\overline{AC}^2 + 4(\overline{BS}^2+\overline{DS}^2)$. De ces deux équations on déduit le théorème d'Euler

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2 = \overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{RS}^2$$

Les deux autres axes donnent des équations analogues, et, si on les ajoute à celle-ci, on aura la formule connue

$$(a)\quad \overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2 = 4(\overline{NQ}^2+\overline{MP}^2+\overline{RS}^2)$$

Dans un triangle dont c, c', c'' sont les côtés, et s, s', s'' les médianes, on a $4(s^2+s'^2+s''^2) = 3(c^2+c'^2+c''^2)$; les faces d'un tétraèdre donnant 4 formules pareilles,

si l'on nomme S^2 la somme des carrés des 12 mé-diânes des faces, on aura $4S^2 = 6(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2)$ donc

$$S^2 = 6(\overline{NQ}^2 + \overline{MP}^2 + \overline{RS}^2)$$

Il est facile de voir que les 4 diagonales de l'un qcq. des huit petits parallélipipèdes formés, dans le parallélipipède circonscrit, par les plans principaux, sont égales aux quatre distances du centre du tétraèdre à ses sommets. Puis donc que dans tout parallélipipède la somme des carrés des 4 diagonales est égale à la somme des carrés des 12 arêtes, il s'ensuit qu'on doit avoir

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{NQ}^2 + \overline{MP}^2 + \overline{RS}^2.$$

Cette équation peut se démontrer directement, et par une démonstration qui s'applique également au quadrilatère plan ou gauche. — car les six triangles OAB, OBC, OCD, ODA, OAC, OBD donnent

$$2(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2) = \overline{AB}^2 + 4.\overline{OQ}^2$$

$$2(\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2) = \overline{BC}^2 + 4.\overline{OP}^2$$

$$2(\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2) = \overline{CD}^2 + 4.\overline{ON}^2$$

$$2(\overline{OD}^2 + \overline{OA}^2) = \overline{DA}^2 + 4.\overline{OM}^2$$

$$2(\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2) = \overline{AC}^2 + 4.\overline{OS}^2$$

$$2(\overline{OB}^2 + \overline{OD}^2) = \overline{BD}^2 + 4.\overline{OR}^2$$

En ajoutant, et ayant égard à l'Eq. (a) on aura

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{NQ}^2 + \overline{MP}^2 + \overline{RS}^2$$

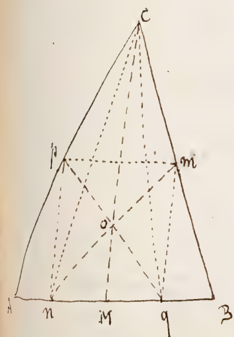
Si l'on ajoute la 1ère Eq. avec la 3e, la 2e avec la 4e, et la 5e avec la 6e. on aura

$$2(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2) = \overline{AB}^2 + \overline{DC}^2 + 2\overline{NQ}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{MP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 2\overline{RS}^2 \qquad (b)$$

ainsi dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des 2 carrés de deux côtés opposés ou de deux diagonales,

plus deux fois le carré de la droite qui joint leurs milieux, est constante, et égale à 2 fois la somme des carrés des distances des sommets au centre o du quadrilatère.

Ces formules ont encore lieu pour un triangle, si l'on considère un point pris arbitrairement sur l'un des côtés du triangle comme le 4e. sommet du quadrilatère. Si en particulier on prend le point M, milieu de AB, on aura (b)



$$2(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OM}^2)=\overline{AM}^2+\overline{BC}^2+2\overline{mn}^2=\overline{BM}^2+\overline{AC}^2+2\overline{pq}^2$$

d'où

$$2(\overline{mn}^2-\overline{pq}^2)=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$$

Le parallélogramme mpnq donne d'ailleurs

$$2(\overline{mn}^2+\overline{pq}^2)=\overline{AB}^2+\overline{CM}^2$$

Et si l'on tire Cn, Cq on trouvera

$$2(\overline{Cn}^2-\overline{Cq}^2)=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$$

Revenons au tétraèdre ABCD de notre première figure. Si l'on y suppose droits les angles plans DAB et DAC, ce qui donnera

$$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2 \qquad \overline{AC}^2=\overline{CD}^2-\overline{AD}^2$$

on conclura de l'équation (b), au moyen de celles-ci, NQ = RS. — Donc, si l'angle trièdre A est trirectangle, on aura

$$NQ = MP = RS$$

ainsi dans le tétraèdre rectangle, les trois axes sont égaux.

Désignons donc par p l'un de ces axes, la formule (a) donnera

$$p=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2}$$

ainsi, chacun des axes d'un tétraèdre rectangle est moitié de la distance du sommet de l'angle droit

trièdre au point qui aurait les trois arêtes rectangulaires pour coordonnées.

Il est facile de voir que les axes se coupent sur cette ligne, au $\frac{1}{4}$ de leur longueur, à partir du sommet. Les sections principales sont alors des rectangles. L'aire de chacune d'elles est le $\frac{1}{4}$ du produit des deux arêtes opposées qui lui sont parallèles. Et comme elle est aussi égale à la $\frac{1}{2}$ du produit des deux axes qui lui servent de diagonales par le sinus de l'angle qu'ils font entre eux, si l'on désigne cet angle par a et par α l'angle que fait $2p$ avec AB, on aura

$\frac{1}{4} AB.DC = \frac{1}{2} p^2 \sin a$. on tire delà

$$\sin a = 2\,\frac{AB}{2p}\,\frac{DC}{2p} = 2 \cos\alpha \sin\alpha = \sin 2\alpha$$

ainsi l'angle de deux axes est le double de celui que fait la ligne $2p$ avec l'arête rectangulaire qui passe par le troisième.

Soient donc α, β, γ les 3 angles que font avec la ligne $2p$ les arêtes rectangulaires AB, AC, AD. On aura, en posant $V = \sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2}$,

$$\cos\alpha = \frac{AB}{V}, \qquad \cos 2\alpha = \frac{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2}{V^2}.$$

$$\cos\beta = \frac{AC}{V}, \qquad \cos 2\beta = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2}{V^2}.$$

$$\cos\gamma = \frac{AD}{V}, \qquad \cos 2\gamma = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{V^2}.$$

d'où

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$$

Relation assez remarquable.

Soit S l'aire de la face hypoténusale, on a

$S^2 = \frac{1}{4}\left(\overline{AB}^2.\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2.\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2.\overline{AD}^2\right)$, équation qu'on peut écrire de 3 manières

$$S^2 - \frac{1}{4}\overline{AC}^2.\overline{AD}^2 = \frac{1}{4}\overline{AB}^2.\overline{CD}^2$$

$$S^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2.\overline{AD}^2 = \frac{1}{4}\overline{AC}^2.\overline{BD}^2$$

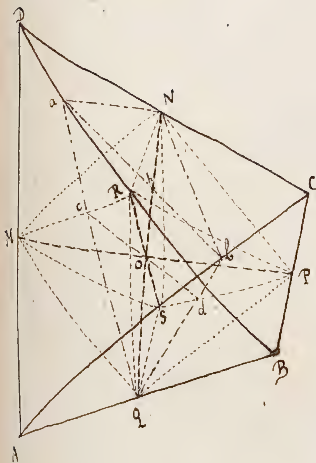
$$S^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2.\overline{AC}^2 = \frac{1}{4}\overline{AD}^2.\overline{BC}^2$$

Si l'on ajoute ces 3 Éq. en observant que leurs seconds membres sont égaux à 4 fois les carrés des aires des sections principales, on trouvera, en désignant ces sections par s, s', s'',

$$S^2 = 2(s^2 + s'^2 + s''^2)$$

Donc : Dans tout tétraèdre rectangulaire, le carré de l'aire de la face hypoténusale est double de la somme des carrés des aires des sections principales.

Tout plan passant par l'un des axes d'un tétraèdre qcq. divise ce tétraèdre en deux parties équivalentes.



Soit en effet aNbQ le plan coupant conduit par l'axe NQ. Le plan principal RNSQ partage le tétraèdre en deux parties équivalentes : et le plan aNbQ ôte à l'une de ces parties le tétraèdre bNQS pour le donner à l'autre, et ôte à celle-ci le tétraèdre aNQR pour le donner à la première. Or il est facile de voir que ces deux tétr. sont équiv. car, outre qu'ils ont pour bases les deux moitiés d'un même parallélogr. RNSQ, on sait que leurs sommets a et b sont à la même distance des bases.

La diagonale mobile ab reste parallèle au plan principal MRPS, et est coupée en deux parties égales en h par la diagonale fixe NQ. On peut le voir aisément.

La diagonale variable ab sera minimum quand l'intersection cd du plan mobile avec le plan MRPS sera perp. à MP. Car, concevons qu'il en soit ainsi, et imagin. par ab (qui est parallèle à cd) un plan parall. à MRPS. Ce plan coupera celles des faces opposées du parallélipip. circonscr. qui passent par AC et BD suivant 2 droites parallèles à MP. et ab sera une perp. commune entre ces deux parallèles. — Que l'on conçoive ensuite tant

d'autres plans qu'on voudra menés par NQ. Les diagonales mobiles correspondantes étant toujours parallèles au plan MRPS, si l'on transporte ces diagonales, parallèlem^t. à elles-mêmes jusqu'à ce que leurs milieux viennent coïncider avec h, leurs extrémités se trouveront alors sur les parallèles menées par a et b à MN. Mais elles seront obliques entre ces parallèles, donc plus longues que ab.

Soit α l'angle des deux diagonales NQ, ab. L'aire de la section sera $\frac{1}{2}$ NQ. $\overline{ab}$ sin α. Mais si du point a on abaisse une perp. p sur NQ, cette perp. aura pour expression $\frac{1}{2}$ $\overline{ab}$. sin α : en sorte que l'aire de la section est p. NQ. Et comme NQ est constant, les aires seront proport. à p, et la plus petite répondra au cas où p sera la plus courte distance entre BD et NQ, ou bien lorsque p sera la $\frac{1}{2}$ plus courte distance entre AC et BD, ou bien lorsque le plan aNbQ sera perp. au plan principal MNPQ.



Donc De tous les plans qui, passant par un même axe, coupent les deux mêmes couples d'arêtes opposées, celui qui donne la plus petite section est le plan perp. à celui des plans princip. qui contient, avec l'axe dont il s'agit, celui des deux autres qui se termine aux milieux des arêtes opposées que le plan coupant ne doit pas rencontrer. —

On peut enfin démontrer qu'un plan qui passe par le centre o ne partage un tétraèdre en deux parties équivalentes que s'il contient un des axes.

Analogies entre le Triangle et le Tétraèdre.

---

1. Les perp. élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se coupent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit.

2. Les plans perp. sur les milieux des arêtes d'un Tétraèdre se coupent tous six en un même point qui est le centre de la Sphère circonscrite:

ou autrement:

Les perp. élevées aux faces d'un tétraèdre par les centres des cercles circonscrits à ces faces se coupent toutes quatre en un même point qui est le centre de la Sphère circonscrite.

Ces propositions deviennent évidentes si l'on considère que les arêtes d'un tétraèdre sont des cordes de la Sphère circonscrite, que les cercles circonscrits à ses faces sont des cercles de cette même Sphère, et que les plans perp. aux milieux des arêtes ainsi que les droites menées par les centres de ces cercles perp. à leurs plans passent nécessairement par le centre de la Sphère.

1°. Les bissectrices des angles d'un triangle se coupent au centre du cercle inscrit.

2°. Les plans bissecteurs des dièdres d'un tétraèdre se coupent tous six au centre de la Sphère inscrite:

ou autrement:

Les droites qui, partant des sommets, font des angles égaux avec les faces des trièdres d'un tétr. se coupent

toutes quatre au centre de la Sphère inscrite.

En effet 1°. Les deux faces de l'un qcq. des angles dièdres sont des plans tang. à la Sphère inscrite : donc leur plan bissecteur passe au centre.

2°. Soit un trièdre circonscrit à une Sphère : le cône droit inscrit à ce trièdre sera comme lui circonscrit à la Sphère : or il est facile de voir que l'axe de ce cône, qui ne sera autre chose qu'une droite partant du sommet du trièdre et faisant des angles ég. avec ses faces, passera par le centre de la Sphère.

---

1. Les médianes d'un triangle se coupent au centre de gravité, ou centre des moyennes distances des trois sommets.

2. Les droites qui joignent chaque sommet d'un tétraèdre au C. de Gr. ou C. des M. D. de ses trois autres sommets, se coupent toutes 4 en un même point qui est le C. de Gr. ou C. des M. D. des 4 sommets du tétraèdre.

Il est facile de s'en convaincre ainsi :

1°. Si l'on joint les milieux des côtés du triangle, on en forme un autre ayant mêmes médianes : et, si l'on poursuit ....

2°. De même, si l'on considère les C. de Gr. des 4 faces comme les sommets d'un nouveau tétraèdre ....

Rem. I les triangles successifs sont tels que, si 1 est le périmètre du plus grand, la somme des autres périm. est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1$; et si l'on prend $= 1$ l'aire du plus grand, la somme des aires

des autres sera $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{1}{3}$.

Rem. II. — Pour les Tétraèdres :

Surf. du 1er $= 1$; Somme des autres Surfaces $=$
$\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \cdots = \frac{1}{8}$.

Vol. du 1er. $= 1$; Som. des autres Vol. $= \frac{1}{27} + \frac{1}{27^2} + \cdots = \frac{1}{26}$

---

1. Un côté qcq. d'un triangle est égal à la somme des produits des deux autres par les cosinus de leurs inclinaisons sur celui-là.

2. Une face qcq. d'un Tetr. est égale à la somme des produits des trois autres …

C'est évident par les projections : et

$$c'' = c \cos(cc'') + c' \cos(c'c'')$$

pour le triangle

$$t''' = t \cos(tt''') + t' \cos(t't''') + t'' \cos(t''t''')$$

pour le tétraèdre.

---

1. Le carré de l'un des côtés d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres moins le double du produit de ces côtés par le cosinus …

2. Le carré d'une des faces d'un Tétraèdre est la somme des carrés des 3 autres moins les doubles des produits de ces mêmes faces multipliées deux à deux et par les cos. de leurs inclinaisons mutuelles.

En effet 1°. on a par ce qui précède.

$$c = c' \cos(cc') + c'' \cos(cc'')$$
$$c' = c'' \cos(c'c'') + c \cos(cc')$$
$$c'' = c \cos(cc'') + c' \cos(c'c'')$$



multipliant respectiv. par c, c', c'', et retranchant la dernière Eq. de la somme des 2 premières, il vient, en réduist. et transpost.

$$c''^2 = c^2 + c'^2 - 2cc' \cos(cc')$$

2°. on a aussi

$$t = \ldots$$
$$t' = \ldots$$
$$t'' = \ldots$$
$$t''' = \ldots$$

Multipl. respect. par t, t', t'', t''', et retrancht. la dernier Eq. de la somme des autres, on aura

$$t'''^2 = t^2 + t'^2 + t''^2 - 2tt' \cos(tt') - 2tt'' \cos(tt'') - 2t't'' \cos(t't'')$$

Corollaires : 1°. Triangle rectangle. — 2°. Trièdre tetraèdre ayant un trièdre trirectangle.

---

1. Dans tout triangle, la somme des angles = 2 dr.

2. Dans un tetraèdre dont les arêtes opposées sont perpend. la somme des six angles dièdres augmentée de la somme des 12 inclinaisons des six arêtes sur les 4 faces est const. et Eg. à 12 dr.

Soient A, B deux arêtes opposées. Par A on mène un plan perp. sur B : ce plan déterminera un triangle dont un des angles mesurera l'inclinaison des deux faces qui passent par B, tandis que les deux autres mesureront les inclinaisons de l'arête A sur ces deux faces : opérant de même successivemt. sur chaque arête, on verra que la somme indiquée est la même que la somme des angles de six triangles, donc = 12 dr.

1°. Les perp. trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.

2°. Si deux arêtes contiguës d'un tétraèdre sont resp^t. perp. à leurs opposées, les deux arêtes restantes seront aussi perp. l'une à l'autre, et alors les perp. abaissées des sommets du tétraèdre sur les plans des faces opposées se couperont toutes quatre en un même point lequel est aussi le point d'intersection des six plans conduits par chaque arête, perp. à son opposée.

Ce même point est encore celui où se coupent les 4 perpend. élevées aux faces du tétraèdre par les points de concours de leurs hauteurs.

Soient a b c les 3 arêtes de la base, a' b' c' leurs opposées respectivement. Suppos. a' et b' resp. perp. à a et b. par a' et b' menons deux plans A et B resp. perp. à a et b et coupant la base du tétr. suivant 2 dr. α et β qui se coupent en o : ces deux plans A et B se coupent d'ailleurs suiv^t. une dr. p qui passe en o et au sommet du tétr. — Enfin par c' et p menons un plan C dont l'intersect. avec la base sera une droite γ passant en o.
a étant perp. à A le sera à α, et de même b est perp. à β : donc α et β sont les hauteurs de la base corresp. aux côtés a et b. Donc γ qui passe par o est ~~aussi~~ la 3e hauteur. De plus A et B étant respect. perp. à a et b le sont à la base : donc p est perp. à la base, et par suite à c. Le plan C, passant par c et γ perp. à c, est aussi perp. à c : c' qui est dans C

est donc aussi perp. à c : ce qui démontre la 1ère partie.

Le même raisonnement prouve aussi que, dans un tétr. dont les arêtes sont à 90°. chaque hauteur tombe sur une face au point de concours de ses hauteurs.

Le tétr. ayant ainsi ses arêtes oppos. perp. l'une à l'autre : concevons que par les 3 arêtes de la base on conduise des plans perp. aux arêtes qui sont resp. opposées : ces trois plans se couperont en un certain point suivt. trois droites passant par ce point, et qui, par ce qui vient d'être démontré, ne seront que les 3 haut. des tétr. corresp. aux 3 sommets de la base. De plus il arrivera aussi par ce qui précède que le point de chaque face où tombera la haut. corresp. sera le point de conc. des 3 haut. de cette face.

Donc, 3 qcq. des 4 haut. se coupant en un même point, elles y passent toutes quatre.

De plus la dernière partie résulte évidemt. de la démonstration.

---

1. Dans tout triangle les perp. élevées sur les milieux des côtés se coupent en un même point.

2°. Dans tout tétraèdre dont les arêtes opposées sont à angle droit, les perp. élevées aux plans des faces par leurs centres de gravité se coupent toutes quatre en un même point.

En effet les centres de Gr. des faces du tétr. peuvent être considérés comme les sommets d'un tétr. semblable à celui-là et ayant ses faces parallèles à leurs homo.

-logues dans le premier : ce nouveau tétr. a donc comme le proposé ses arêtes opposées à 90° : donc ses hauteurs qui sont les perp. élevées aux plans des faces du 1er par les C. de Gr. de ces faces, se coupent au même point.

---

1. Dans tout triangle, l'intersect. des perp. sur les milieux des côtés, le C. de Gr. et le point de conc. des haut. sont 3 points en ligne droite, le 2°. entre les deux autres : de plus la distance des 2 derniers est dou-ble de la dist. des deux premiers.

2. Dans tout tétr. dont les faces oppos. sont à 90°, l'inters. des perp. élevées aux plans des faces par leurs C. de Gr., le C. de Gr. des 4 sommets du tétr. et le point de conc. des hauteurs sont 3 points en ligne droite, le 2°. in-termédiaire entre les 2 autres : de plus la dist. des 2 derniers est triple de celle des deux premiers.

1°. Soit en effet T un triangle, g son centre de gravité, et p le point de conc. de ses haut. Soit T' un autre triangle ayant ses sommets aux milieux des côtés du premier : soit g' son centre de gravité, et p' le point de conc. de ses haut. T et T' sont semblables, leurs côtés sont parallèles, et le rapport de similitude est :: 2 : 1 : donc les lignes homo-logues gp et g'p' seront parallèles, et gp = 2g'p'. Mais g' et g coïncident. Donc p, g, p' sont en ligne droite. — Or si q est le point des ren-contre des perp. élevées sur les milieux des 3 côtés de T, q coïncidera avec p'. Donc les trois

points p, g, q sont en ligne droite, et $gp = 2gq$.

La même démonstr. a lieu pour le tétr. si l'on a recours à un second tétr. ayant ses sommets aux centres de gr. des faces du premier.

Problème d'arithmétique.

Deux suites, composées chacune de n nombres positifs et inégaux, étant données, comment faut-il disposer entre eux les nombres de ces deux suites pour que la somme des produits ou des quotients des termes de la première par les termes corresp[on]d. de la 2e. soit maxima ou minima ?

Soient $A_1\ A_2\ A_3\ \ldots A_g \ldots A_h \ldots A_n$ les nombres de la 1ère suite rangés par ordre de grandeur, du > au <. et supposons que ceux de la 2e rangés comme ils doivent l'être pour donner lieu au $\left\{\begin{matrix}\text{maxim.}\\ \text{minim.}\end{matrix}\right\}$ soient les suivants : $B_1\ B_2\ B_3 \ldots B_g \ldots B_h \ldots B_n$.

1er. cas, pour la somme des Produits. — Puisque

$$A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots + A_gB_g + \cdots + A_hB_h + \cdots + A_nB_n = P$$

est un $\left\{\begin{matrix}\text{max.}\\ \text{min.}\end{matrix}\right\}$ il faut que, les nombres de la 1re. suite conservant toujours le même ordre, la permuta-tion entre eux de deux q[uel]c[on]q. des termes de la 2e. suite donne un résultat $\lesseqgtr$ que le précédent : c.à.d. qu'en écrivant

$$A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots + A_gB_h + \cdots + A_hB_g + \cdots + A_nB_n = Q$$

on doit avoir $$Q \lesseqgtr P$$

ou, en substituant et réduisant

$$A_gB_h + A_hB_g \lesseqgtr A_gB_g + A_hB_h$$

ou, en transposant et décomposant,

$$(A_g - A_h) \cdot (B_h - B_g) \lesseqgtr 0$$

or, par hypothèse, $A_g - A_h > 0$. donc

$$B_h - B_g \lesseqgtr 0 \quad \text{ou} \quad B_h \lesseqgtr B_g$$

ainsi les termes de la 1ère suite allant en décroissant, du premier au dernier, il faut pour le $\left\{ \begin{matrix} \text{max.} \\ \text{min.} \end{matrix} \right\}$ que les termes de la 2e. aillent en $\left\{ \begin{matrix} \text{décroiss.} \\ \text{croissant} \end{matrix} \right\}$ du premier au dernier.

2°. Pour la somme des quotients. Même marche. Résultat inverse.

Problème de Géométrie.

Trouver la distance entre le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit à un même triangle.

Soient A B C les trois angles du triangle, R et r les rayons des cercles circ. et inscr. et D la distance cherchée des deux centres. — En considérant D comme l'un des côtés d'un triangle dont le sommet est en A, observant que les 2 autres côtés de ce triangle sont R et $\frac{r}{\sin\frac{1}{2}A}$, et l'angle compris est $\frac{1}{2}(B-C)$ ou $\frac{1}{2}(C-B)$, on trouvera par l'Eq. fondam. de la Trigon.

$$2rR\cos\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}A = r^2 + (R^2-D^2)\sin^2\tfrac{1}{2}A$$

En transportant le sommet de ce triangle de A en B, on aura semblablement.

$$2rR\cos\tfrac{1}{2}(A-C)\sin\tfrac{1}{2}B = r^2 + (R^2-D^2)\sin^2\tfrac{1}{2}B$$

Retranchant cette dernière Eq. de la 1ère, il viendra

$$2rR\left\{\cos\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}A - \cos\tfrac{1}{2}(A-C)\sin\tfrac{1}{2}B\right\} = (R^2-D^2)(\sin^2\tfrac{1}{2}A - \sin^2\tfrac{1}{2}B)$$

or

$$\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}A - \cos\tfrac{1}{2}(A-C)\sin\tfrac{1}{2}B &= \sin\tfrac{1}{2}(A-B)\cos\tfrac{1}{2}C \\ &= \sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}(A+B) \\ &= \sin^2\tfrac{1}{2}A - \sin^2\tfrac{1}{2}B\end{aligned}$$

on a donc simplement

$$2rR = R^2 - D^2$$

ou

$$D = \sqrt{R^2 - 2rR}$$

Hexagones inscrits et circonscrits aux Sections coniques.

I Hexagone inscrit.

1. Par les Éléments de géométrie il est facile de démontrer que : Si deux côtés consécutifs d'un hexagone inscrit au cercle sont respectivement parallèles à leurs opposés, les deux autres côtés opposés de cet hexagone seront aussi parallèles l'un à l'autre.

2. Il résulte de là que : Si deux côtés consécutifs d'un hexagone inscrit à l'ellipse sont respect. parallèles à leurs opposés, les deux autres côtés de cet hexagone seront aussi parallèles l'un à l'autre. — Que l'on conçoive en effet qu'après avoir rendu le petit axe de l'ellipse parallèle à un plan fixe, on fasse tourner son plan autour de cet axe jusqu'à ce que la projection orthogonale du grand axe sur le plan fixe soit égale à ce même petit axe : si l'on projette toute la figure sur ce plan ... etc.

3. Il suit delà que : Dans tout hexagone inscrit au cercle, les points de concours des prolongements des côtés opposés sont tous trois en ligne droite. — Que l'on fasse en effet une perspective de la figure de façon que cette perspective soit une ellipse à laquelle soit inscrit un hexagone dont deux côtés consécutifs soient respectivt. parallèles à leurs opposés : les deux autres côtés opposés de l'hexag. seront également parallèles. Donc les droites menées de l'œil au point de concours des prolongements des côtés opposés de l'hexagone ins-

-crit au cercle sont toutes trois parallèles au tableau, et conséquemment dans un plan passant par l'œil : les points de concours sont donc dans ce plan ; et puisqu'ils sont aussi dans le plan du cercle, ils sont sur une même droite, intersection de ces deux plans.

4. Par suite, le même théorème a lieu pour une section conique quelconque.

II. Hexagone circonscrit.

1. Il est facile de démontrer que : Si deux des diagonales joignant des sommets opposés d'un hexagone circonscrit au cercle se coupent à son centre, la diago-nale joignant les deux autres sommets opposés passera aussi par le centre du cercle.

2. Par suite, à cause des projections, le même théo-rème est vrai pour l'ellipse.

3. Donc : Dans tout hexagone circonscrit au cercle, les diagonales joignant les sommets opposés se coupent en un même point. — car on peut faire une persp. de la figure de manière que la persp. du cercle soit une ellipse ayant pour centre la persp. de l'inters. de 2 qcq. des 3 diagonales de l'Hex. circ. à ce cercle. ...

4. Donc le même théorème est vrai pour une conique quelconque.

Le même mode de raisonnemt. peut être employé pour démontrer le théorème suivt. qui renferme la propriété des pôles des coniques :

Deux hexagones étant, l'un inscr. l'autre circ. à une

même Sect. con. de manière que les Sommets de l'inscrit coïncident avec les points de tangence du circonscrit, si les Diagonales joignant les Sommets opposés de l'inscrit se coupent en un même point, les points de concours des directions des côtés opposés du circonscrit seront tous trois sur une même ligne droite, et Réciproquemt.

On ne doit pas perdre de vue, dans tout ceci, que le Système de deux droites tracées sur un même plan forme une véritable ligne du 2d. ordre, et doit conséquemt. en avoir toutes les propriétés.

Concevons que le centre d'une Surf. conique qcq. du 2d. ordre coïncide avec celui d'une Sphère; le Système total des lignes à double courbure résultant de l'intersect. des deux Surf. jouira par Rapport aux arcs de Gr. cercles, des mêmes propriétés dont jouissent les lignes du 2d. ordre par Rapport aux lignes droites.

Caractères de divisibilité.

Soit N un nombre entier qcq. écrit dans le système de numération dont b est la base. Concevons qu'on ait partagé ce nombre, en allant de droite à gauche, en tranches de m chiffres chacune, sauf la dernière qui pourra en avoir moins: et soient, en allant aussi de ~~d~~ droite à gauche, A_0 A_1 A_2 A_3 .. ces tranches considérées comme autant de nombres isolés. on aura évidemment

$$N = A_0 + A_1 b^m + A_2 b^{2m} + A_3 b^{3m} + \cdots$$

Cette éq. pourra être mise sous les trois formes suivantes

$$N = b^m \left(A_1 + A_2 b^m + A_3 b^{2m} + \cdots \right) + A_0 \qquad (1)$$

$$N = \begin{cases} \left[A_1 (b^m - 1) + A_2 (b^{2m} - 1) + A_3 (b^{3m} - 1) + \cdots \right] \\ \quad + (A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots) \end{cases} \qquad (2)$$

$$N = \begin{cases} \left[A_1 (b^m + 1) + A_2 (b^{2m} - 1) + A_3 (b^{3m} + 1) + \cdots \right] \\ \quad + (A_0 + A_2 + A_4 + \cdots) - (A_1 + A_3 + A_5 + \cdots) \end{cases} \qquad (3)$$

En observant que les ~~divers~~ premières parties de ces di-verses expressions de N sont respectivement divisibles par b^m, $b^m - 1$, $b^m + 1$, et conséquemment par tous les divi-seurs de ces 3 nombres, on aura :

1°. Dans tout système de numération, le reste de la division d'un nombre qcq. par un diviseur qcq. de la $m^{ième}$ puissance de la base du système, est le même que celui qu'on obtient en divisant sa 1re. tranche de m chiffres à droite par ce ~~m~~ diviseur.

2°. Dans tout S. de N., le reste de la div. d'un nombre

qcq. par un diviseur qcq. de b^m-1 est le même que celui qu'on obtient en divisant la somme des tranches de m chiffres par ce diviseur.

3°. Le reste de la divis. par un diviseur qcq. de b^m+1 est le même que celui qu'on obtient en divisant par ce diviseur la somme des tranches de m chiffres de rang impair moins la somme des tranches de rang pair.

Ainsi dans notre système de numération, la divisibilité d'un nombre par 37 (qui divise 999) tiendra à la divisibilité par 37 de la somme des ses tranches de 3 chiffres: la divisibilité par 7 (qui divise 1001) dépendra de la divisibilité par 7 de la somme des ses tranches de 3 chiffres de rangs impairs, moins la somme des tranches de rangs pairs.

Si $m=1$, on retrouve les règles connues de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 11.

Problème.

Dans toute ligne du 2e. ordre qui a un centre, si l'on mène deux tangentes parallèles, fixes, et une troisième tangente variable; le produit des segments des deux premières compris depuis leurs points de contact jusqu'à la 3e. sera constant.

En effet:

Les points de contact des deux Tg. parallèles étant les extrémités d'un diamètre, nous prendrons ce diamètre $2a$ pour axe des x, et son conjugué $2b$ pour axe des y.

Si alors $x'y'$ est le point de contact de la 3e. tang. nous avons

$$b^2x'^2 \pm a^2y'^2 = a^2b^2. \qquad (1)$$

et l'Eq. de cette 3e tg. sera

$$b^2xx' \pm a^2yy' = a^2b^2 \qquad (2)$$

on en déduira la longueur des segments que cette Tg. détermine sur les deux premières en y faisant successivement $x=a$ et $x=-a$, et en prenant les valeurs correspondantes de y, ce qui donnera

$$y = \pm\frac{b^2(a-x')}{ay'} \qquad y = \pm\frac{b^2(a+x')}{ay'}$$

le produit des deux segments sera donc

$$b^2\,\frac{a^2b^2-b^2x'^2}{a^2y'^2}$$

ce qui se réduit à $\pm b^2$ en vertu de l'Eq. (1).
donc ... cqfd.

On peut aussi le démontrer géométriquement. — Soient

en effet C le centre de la Courbe AB un diamètre qcq. CD son ½ conjugué, AM et BN des Tg. aux Extrémités de ce 1er diamètre ..... etc : la construction est évidente.

L'intersection S des deux diagonales du quadrilatère sera sur AB. Donc les parallèles MP et NQ donneront

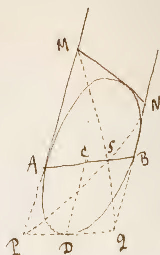
SB : SA :: BQ : AM

SA : SB :: AP : BN

Donc

$$AM . BN = AP . BQ$$

$$= \overline{CD}^2 \qquad \text{cqfd.}$$



Théorème.

Si deux ellipses sont telles que 2 diam. conj. de l'une soient resp. parallèles à 2 D. C. de l'autre, et se coupent en 4 points, ces 4 points sont sur une 3e. ellipse dans laquelle les diam. conj. égaux sont resp. parallèles aux D.C. déjà parallèles dans les deux premières.

Soient pris les axes parallèles à ces diam.

$$\text{Eq. des Ell.} \quad \left.\begin{array}{l} Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+K=0 \\ A'x^2+B'y^2+2D'x+2E'y+K'=0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Si l'on multipl. respect. par $B'-A'$ et $A-B$, et si l'on ajoute, on aura ~~une~~ l'Eq. d'une courbe qui passera par les 4 intersections : or ce sera

$$(AB'-BA')x^2+(AB'-BA')y^2+Mx+Ny+H=0$$

Donc ... cqfd.

Corollaire : Deux ellipses dont les axes sont ~~perp~~ parallèles se coupent en 4 points qui sont sur une même circonférence.

Il existe un théorème semblable pour 3 ellipsoïdes qui se coupent en 8 points.

Théorèmes
Sur les Lignes et Surfaces du 2^d. ordre.

Une ligne du 2^d. ordre étant donnée, et un point fixe étant pris arbitrairement sur cette courbe; si l'on prend la Tangente en ce point pour axe des x, et la normale qui lui répond pour axe des y, en désignant par N la longueur de la normale mesurée depuis l'origine jusqu'au point où elle rencontre de nouveau la courbe, par $y = Ax + N$ l'Eq. de la Tg. à cette dernière extrémité de la normale, et enfin par P le rayon de courbure qui répond à l'origine; l'Equation de la courbe dont il s'agit sera

$$Nx^2 + 2Py(y - Ax - N) = 0 \qquad (1)$$

comme il est facile de voir en déterminant successivem^t. les coeff. de l'Eq. Générale $x^2 + \alpha y^2 + \beta xy + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0$, d'après les conditions données. — Soit D une droite menée arbitrairem^t. par l'origine et formant avec les axes des ~~co~~ angles dont les cos. soient a et b, ce qui donnera

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad (2)$$

L'Eq. de cette droite sera

$$ay = bx \qquad (3)$$

En la combinant avec l'Eq. (1), on obtiendra, pour les coordonnées de l'intersection de D avec la courbe,

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{2NPab}{Na^2 + 2Pb^2 - 2APab} \\ y &= \frac{2NPb^2}{Na^2 + 2Pb^2 - 2APab} \end{aligned} \right. \qquad (4)$$

Pour une nouvelle droite D' passant également par

l'origine et formant avec les axes des angles dont les cosinus sont a' et b', ce qui donne

$$a'^2 + b'^2 = 1 \qquad (5)$$

on aura semblablement.

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{2NPa'b'}{Na'^2+2Pb'^2-2APa'b'} \\ y &= \frac{2NPb'^2}{Na'^2+2Pb'^2-2APa'b'} \end{aligned} \right| \qquad (6)$$

on trouvera aisément d'après cela que l'Eq. de la corde C qui joint les extrémités des deux droites D et D' est, en divisant par $ab'-ba'$,

$$\left\{ N(ab'+ba') - 2APbb' \right\} x + (2Pbb' - Naa')y = 2NPbb' \qquad (7)$$

Si, pour savoir en quels points la corde C coupe la normale et la tangente, on fait successivement $x=0$ et $y=0$ dans cette Eq. il viendra

$$y = \frac{2NP}{2P - N\frac{aa'}{bb'}} \qquad (8)$$

$$x = \frac{2NP}{N\left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\right) - 2AP} \qquad (9)$$

Alors l'on voit que, pourvu que $\frac{aa'}{bb'}$ soit constant, la corde C coupera toujours la normale au même point; et que, pourvu que $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}$ soit constant, cette même corde coupera toujours la tg. au même point, qq. soient D et D'.

Remarquons le cas où

$$aa' + bb' = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{aa'}{bb'} = -1$$

Les droites D, D' sont alors perpendiculaires l'une sur

l'autre : et le point fixe de la normale par lequel passe la droite C est donné par la formule

$$y = \frac{2NP}{2P+N} \qquad (10)$$

De là résulte ce théorème.

Théorème I. — Si l'on inscrit à une ligne du second ordre une suite de triangles rectangles ayant tous le sommet de l'angle droit situé en un même point de cette courbe, leurs hypoténuses concourront toutes en un même point de la normale menée par le sommet commun à tous ces triangles ; d'où il suit encore, par la théorie des pôles, que les points de concours des tangentes aux extrémités de ces hypoténuses seront tous situés sur une même droite.

D'où une construction simple de la normale et de la tangente quand la courbe est tracée.

D'où encore le rayon du cercle osculateur : soit en effet K la distance de l'origine au point fixe de la normale par lequel passent toutes les hypoténuses, on aura (10)

$$K = \frac{2NP}{2P+N} \qquad \text{d'où} \qquad P = \frac{1}{2}\,\frac{KN}{N-K}$$

Il résulte clairement de ce qui précède qu'il y aurait une infinité d'autres cas où les droites C se couperaient en un même point de la normale. Nous nous bornerons à signaler celui où l'on aurait

$$\frac{aa'}{bb'} = 1 \qquad \text{ou} \quad aa' = bb' \qquad \text{ou encore} \quad \frac{a}{b} = \frac{b'}{a'}$$

C'est celui où D et D' feraient d'un même côté, soit avec la tg. soit avec la normale, des angles complément l'un de l'autre. Le point fixe serait alors donné par la formule

$$y = \frac{2NP}{2P-N}$$

Parmi les différents cas où $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}$ est constant, on peut remarquer celui où cette fonction est nulle. Les droites D et D' font alors, de différents côtés, des angles ég. soit avec la tg. soit avec la normale; c.à.d. que la normale bissecte l'angle des deux droites. Le point fixe de la tang. où concourent alors les droites C est donné (9) par la formule

$$x = -\frac{N}{A}$$

Ce point est donc celui où concourent les tangentes aux deux extrémités de la normale. — De là ce théorème :

Théorème II. — Si l'on inscrit à une ligne du 2e ordre une suite de triangles ayant tous un sommet commun, et dont l'angle à ce sommet ait la normale pour bissectrice : les côtés opposés de ces triangles iront tous concourir au point de la tang. où elle est coupée par la tang. à l'autre extrémité de cette normale : d'où il résulte encore par la théorie des pôles que les points de concours des tangentes aux extrémités de ces 3es côtés des triangles seront tous sur la normale elle-même.

La vérité de ce th. s'aperçoit du reste immédiatem^t^. si l'on remarque que l'ég. du système de deux droites qui, passant par l'origine, font de part et d'autre des angles égaux avec la normale, est de la forme

$$x^2 = \lambda y^2 \qquad (11)$$

En éliminant x^2 entre (11) et (1), et divisant par y, il vient

$$(N\lambda - 2P)y - 2P(Ax + N) = 0 \qquad (12)$$

équation d'une droite qui, qq. soit λ, coupe toujours l'axe des x au point pour lequel on a $x = -\frac{N}{A}$.

Il est aisé de voir d'après cela que si, par le point

de la courbe que l'on considère, l'on mène deux cordes bissectrices des angles que forme la normale avec la tangente, la droite qui joindra les extrémités de ces cordes déterminera, sur la normale et sur la tangente, les points fixes relatifs à nos 2 théor.

Une surface du 2^d. ordre étant donnée, et un point fixe étant pris arbitrairem^t. sur cette surface ; si l'on prend les 2 tg. conjuguées rectangulaires de ce point pour axes des x et des y, et la normale pour axe des z : si N est la longueur de la normale, et

$$z = Ax + By + N$$

l'Eq. du plan tg. à l'autre extrémité ; P et Q les deux rayons de courbure des sections suivant les plans des xz et des yz, l'Eq. de la surface prendra la forme

$$N(Qx^2+Py^2) + 2PQz(z-Ax-By-N) = 0 \qquad (1)$$

De là, par des calculs tout pareils aux précédents, bien que plus compliqués, on arrive à ce théor :

Théorème III. – Si à une surface du 2^d. degré on inscrit une suite de tétraèdres rectangles, ayant tous le sommet de leur trièdre trirectangle situé en un même point qcq. de cette surface : leurs faces hypoténusales concourront toutes en un même point de la normale menée par le sommet commun de tous ces tétraèdres $\left[z = \dfrac{2NPQ}{P(N+Q)+Q(N+P)} \right]$: d'où il suit encore, par la théorie des pôles, que les surfaces coniques circonscrites qui auront pour lignes de contact avec la surf. dont il s'agit les intersections avec les faces hypoténusales, auront toutes leurs sommets sur un même plan.

D'où la construction du plan tangent en un point quelconque.

Concevons présentemt. une surface conique ayant son centre à l'origine, dont l'axe soit l'axe des z, c.a.d. la normale, et dont les sections parallèles au plan tangent, elliptiques ou hyperboliques, aient leurs diamètres principaux respectivemt. proport. aux racines carrées des rayons de plus grande et de < courbure au point considéré : l'Eq. de ce cône sera de la forme

$$Qx^2 + Py^2 = \lambda z^2 \qquad (2)$$

λ étant une indéterminée qui fixe la grandeur du cône.

Si entre (1) et (2) on élimine $Qx^2 + Py^2$, il vient

$$(N\lambda + 2PQ)z - 2PQ(Ax + By + N) = 0 \qquad (3)$$

Eq. linéaire qui montre que, qq. soit λ, l'intersection des deux surfaces est toujours une courbe plane.

Si, pour connaître suivant quelle droite le plan de cette courbe rencontre le plan tangent, on fait $z = 0$ dans (3), on aura

$$Ax + By + N = 0 \qquad (4)$$

Résultat indépendant de λ : cette droite est l'intersect. des plans tg. aux deux extrém. de la normale.

D'où

Théorème IV. – Enoncé facile, mais long.

D'où il suit, par la théorie des poles, que les cônes circonscrits le long des courbes planes que détermine le plan (3) auront tous leurs sommets sur une même droite. – Donc aussi les cônes de révolution qui ont resp. pour sommet et pour axe commun un ombilic d'une surf. du 2d. ordre et la normale, la coupent suivant une série de cercles.

La démonstration analytique du Théor. III étant compliquée, il est bon de voir qu'on peut la déduire de I (I) par des considérations géométriques.

Soient SABC et SA'B'C deux tétraèdres rectangles en S inscrits à la surf. et ayant l'arête SC commune. Les plans ASB, A'SB' étant tous deux perp. à SC coïncideront, et détermineront dans la surface une section du 2.d ordre à laquelle seront inscrits les deux triangles rectangles de même sommet ASB, A'SB'. Soit P l'intersection des hypoténuses AB, A'B' : SP sera la direction de la normale à la section en S : et P sera sur cette normale un point indépendant de la situation respective de nos deux tétraèdres. Soit T la tg. au point S de la section, laquelle est située sur le plan tg. à la surface. Si l'on mène CP, le triangle CSP sera rect. en S : mais SC étant perp. au plan sécant, il l'est à T : donc T, perp. à SC et SP, est perp. au plan du triangle : le plan tg. à la surface en S, qui contient T, sera donc aussi perp. au plan CSP, et par conséq.t ce dernier contiendra la normale à la surf. en S, laquelle coupera CP en quelque point Q par lequel passeront également les deux faces hypoténusales ACB A'CB' puisqu'elles se coupent suivant CP qui contient Q.

Donc, en faisant tourner notre trièdre tri-rect. DD'D" autour d'une qcq. de ses arêtes, nous voyons que le plan C déterminé par les extrémités de ces mêmes arêtes ne cessera pas de couper la normale à la surface courbe en un même point fixe Q. — Or il est connu que tout changement de situation d'un angle trièdre tri-

-rectangle autour de son sommet revient à 3 Rotations successives autour de ses arêtes : donc, quelle que soit la situation de ce trièdre, le plan C coupera toujours la normale au même point.

Les théorèmes I et III ne sont que des cas parti-culiers d'autres plus généraux.

En effet, on a vu que

$$y = \frac{2NPbb'}{2Pbb' - Naa'} \qquad (1)$$

Cela posé, concevons une seconde ligne du second ordre dont les axes des coordonnées soient les diam. principaux ; et concevons de plus que D et D' soient deux diam. conj. qcq. de cette se-conde courbe ; nous exprimerons cette circonstance par l'Equation

$$aa'\alpha + bb'\beta = 0 \qquad (2)$$

où α et β sont deux constantes ne dépendant que des di-mensions de la seconde courbe.

Or si l'on élimine bb' entre (1) et (2), on trouve

$$y = \frac{2\alpha NP}{\beta N - 2\alpha P} \qquad (3)$$

valeur constante. Donc

Théorème I'. Si l'on conçoit deux lignes du 2e. ordre telles ... etc.

La forme du Résultat (3) montre en outre que la seconde courbe peut varier de grandeur en restant semblable à elle-même. — Si elle se réduit à un cercle, on a le Théor. I.

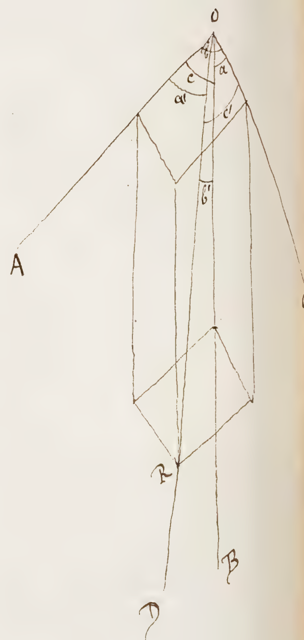
Mêmes remarques dans le cas de l'Espace.

Relation entre les six angles plans d'un angle tétraèdre.

Soient OA, OB, OC, OD 4 droites indéfinies partant d'un point O. Soient

$BOC = a \quad COA = b \quad AOB = c \quad DOA = a' \quad DOB = b' \quad DOC = c'$

Par OA, OB, OC pris 2 à 2 soient menés 3 plans. Soit prise sur OD une longueur $OR = r$, et par R menons 3 plans parallèles aux premiers. r sera diagonale d'un parallélipip. dont les arêtes OA OB OC auront des long. que j'appelle respect^t. x y z.



Projetant sur OD les divers quadrilatères gauches que forment les arêtes consécutives x y z avec r, j'aurai

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos a' - y\cos c - z\cos b \\ y &= r\cos b' - z\cos a - x\cos c \\ z &= r\cos c' - x\cos b - y\cos a \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$r = x\cos a' + y\cos b' + z\cos c' \quad (2)$$

Tirant x, y, z des 3 premières et reportant dans (2) ce qui est il est vrai un peu long, on a

$$1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c = \begin{cases} \sin^2 a\cos^2 a' - 2\cos b'\cos c'(\cos a - \cos b\cos c) \\ +\sin^2 b\cos^2 b' - 2\cos c'\cos a'(\cos b - \cos c\cos a) \\ +\sin^2 c\cos^2 c' - 2\cos a'\cos b'(\cos c - \cos a\cos b) \end{cases}$$

c'est la relation cherchée.

Théorème.

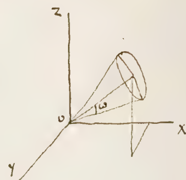
Si deux surfaces du 2^d. ordre se coupent suivant le système de deux lignes courbes isolées l'une de l'autre, et si l'une de ces courbes est plane, l'autre le sera également.

Imaginons en effet que l'on projette l'ensemble des deux intersections sur un plan qcq. non perp. à celui de la section plane, le système des deux projections pourra être exprimé par une Eq. unique qui sera du 4e degré au moins plus ; mais la section supposée plane étant du 2^d. degré aura pour sa projection une équation de ce degré, laquelle devra diviser l'Eq. du 4e. degré, et donnera pour quotient une Eq. du 2^d. degré au plus, laquelle appartiendra à la project. de l'autre intersection : cette intersection ne saurait donc être elle-même une courbe d'un degré supérieur au second : elle est donc l'intersection de l'une des surfaces dont il s'agit par un plan ; cqfd.

Rem. En général, deux surfaces de l'ordre m se coupant réciproquem^t. suivant le syst. de 2 courbes isolées, l'Eq. de la proj. de l'ensemble de ces 2 courbes sur un plan qcq. sera du degré m^2, si l'une des intersections est plane, sa projection sera du degré m ; l'autre ne sera donc généralem^t. plane qu'autant qu'on aura
$m^2 - m = m$ ou $m = 2$.

Théorèmes de Géométrie.

Soient a b c les cosinus des angles que fait avec les axes coord. l'axe d'un cône droit qui a son sommet à l'origine et dont l'angle générateur est ω : ce qui donne



$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad (1)$$

Les Eq. de cet axe seront

$$\left\{ \begin{array}{l} cx = az \\ cy = bz \end{array} \right\} \qquad (2)$$

Soient

$$\left\{ \begin{array}{l} Cx = Az \\ Cy = Bz \end{array} \right\} \qquad (3)$$

les Eq. d'une génératrice qcq. A B C étant les Cos. de ses angles avec les axes, et

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 \qquad (4)$$

Le cosinus de l'angle de la génératrice (3) avec l'axe (2) sera (vu (1) et (4))

$$aA + bB + cC$$

donc

$$aA + bB + cC = \cos\omega \qquad (5)$$

D'autre part les Eq. (3) et (4) donnent

$$A = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad B = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad C = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Substituant dans (5), il viendra pour l'Eq. du cône dont il s'agit

$$(ax+by+cz)^2 = (x^2+y^2+z^2)\cos^2\omega \qquad (C)$$

Désignons ce cône par C. Pour un autre cône C' de

même sommet que le 1er. l'Eq. sera

$$(a'x+b'y+c'z)^2 = (x^2+y^2+z^2)\cos^2\omega' \qquad (C')$$

avec la condition

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \qquad (6)$$

Nos deux cônes C et C' se coupent en général suivant deux droites passant par l'origine : et toute combinaison de leurs Eq. doit être l'Eq. d'une Surf. passant par ces 2 droites. Telle est donc en particulier l'Eq. qu'on obtient en multipliant en croix (C) et (C') :

$$(ax+by+cz)\cos\omega' = \pm(a'x+b'y+c'z)\cos\omega$$

Cette Eq. appartient à deux plans passant par l'origine, dont l'un seulement contient les intersections des deux cônes. on le reconnaîtra facilement en supposant pour un moment que les deux cônes deviennent égaux et coïncidents, l'Eq. doit se réduire à $0=0$, ce qui ne peut avoir lieu qu'en prent. le signe supérieur. ainsi il est certain que l'Eq. du plan qui contient les deux intersections des deux cônes est

$$(ax+by+cz)\cos\omega' = (a'x+b'y+c'z)\cos\omega \qquad (K'')$$

Cette Eq. est aussi celle de leur plan Tg. commun lorsqu'ils se touchent ; et l'on voit en outre que, même s'ils sont intérieurs ou extérieurs, ce plan existe toujours. Je l'appellerai le Plan Radical des cônes C et C'.

Concevons un 3e. cône C'' ayant même sommet que les deux autres et ayant son axe dans l'axe des z : ce cône, avec C et C', aura aussi des plans Radicaux (K') et (K), dont les Eq. seront

$$(ax+by+cz)\cos\omega'' = z\cos\omega \qquad (K')$$

$$(ax+by+cz)\cos\omega'' = z\cos\omega' \qquad (K)$$

Toute si l'on élimine $\cos\omega''$, ces deux Eq. donnent l'Eq. (K''). donc :

Th. I. Les Plans Rad. de 3 cônes droits qui ont même sommet se coupent suivant une même droite.

Ce sera l'axe Radical des 3 cônes.

Cor. Donc, si l'un des cônes seulement varie de grandeur et de situation en ayant même sommet, l'intersection de ses plans Rad. par rapport aux deux autres ne sortira pas du pl. R. de ceux-ci.

Si l'on conçoit une Sphère qui ait son centre au sommet commun des 3 cônes, leurs intersections avec elle seront de petits cercles, tandis que les inters. des plans Radicaux avec elle seront des Grands Cercles que l'on pourra appeler axes Radicaux des petits cercles pris 2 à 2. — L'axe Radical de deux petits cercles tang. sera le Grand Cercle ~~pat~~ Tang. qui passera par leur point de contact : — celui qui passe par les points d'inters. s'ils se coupent. — et

Th. II. Les axes Radic. de trois cercles qcq. d'une sphère se coupent en un même point.

Soit ce point le Centre Radical des 3 cercles.

Cor. Donc, si l'un des cercles varie sur la sphère, le point de concours de ses axes Rad. avec les 2 autres reste sur l'axe Rad. de ces 2-ci.

De là un moyen facile d'avoir l'axe Rad. de deux cercles qui ne se coupent pas, au moyen de 2 cercles qcq. coupant les 2 premiers.

Tout ce qui précède est indépendt. du Rayon de la Sphère : donc

Th. III. Les axes Rad. de 3 cercles sur un même plan sont 3 droites concourantes.

mêmes Cor. que au Th. II pour la Sphère.

Si l'on fait tourner le Système de deux cercles et de leur axe Radical autour de la ligne des centres (sur un plan), les 2 cercles engendreront des Sphères et l'axe

Radical engendrera un plan qu'on pourra appeler le Plan Radical de ces deux Sphères. — or, de là et de ce qui précède Résulte :

Th. IV. Les plans Radicaux de 3 Sphères, se coupent suivant une même droite.

Cette droite, évid. perp. au plan qui contient les 3 centres, est ce que nous appellerons l'axe Radical des 3 Sphères.

De là il est encore aisé de conclure :

Th. V. Les Six plans Radicaux de 4 Sphères, et leurs 4 axes Radicaux concourent en un même point que nous appellerons leur Centre Radical.

Cor. Si l'une seulement des 4 Sphères varie, le point de concours de ses plans Radicaux déterminés par Rapport aux 3 autres, variable comme elle, ne sortira pas d'une ligne droite, axe Radical de ces 3-ci.

Revenons à nos 3 cônes C C' C''. Supposons C et C'' Tangents. Leur Pl. R. (K') deviendra leur pl. tg. commun, dont l'inters. avec le pl. des axes sera la ligne de contact des deux cônes. Mais l'Eq. de ce dernier pl. est

$$ay = bx$$

et sa combin. avec l'Eq. (K') donne

$$(a^2+b^2)\,x \cos\omega'' = az\,(\cos\omega - c\cos\omega'')$$

$$(a^2+b^2)\,y \cos\omega'' = bz\,(\cos\omega - c\cos\omega'')$$

ainsi voici les 2 Eq. de la ligne de contact de C et C''. Mais l'angle de leurs axes doit être = à la somme ou à la différence de leurs angles Générateurs, donc

$$c = \cos(\omega''+\omega) \quad , \text{d'où } a^2+b^2 = 1-c^2 = \sin^2(\omega''+\omega)$$

ω étant $\gtrless 0$ suivant que les 2 cônes se touchent $\left\{\begin{matrix}\text{Ext.}\\\text{Int.}\end{matrix}\right|$

on a donc

$$\cos\omega - c\cos\omega'' = \cos\omega - \cos\omega''\cos(\omega''+\omega) = \sin\omega''\sin(\omega''+\omega)$$

au moyen de quoi nos 2 Eq. deviennent

$$x = \frac{az\,Tg\omega''}{Sin(\omega''+\omega)} \qquad y = \frac{bz\,Tg\omega''}{Sin(\omega''+\omega)} \qquad (t')$$

on trouvera semblablᵗ. pour les Eq. de la Ligne de cont. de C'' et C'

$$x = \frac{a'z\,Tg\omega''}{Sin(\omega''+\omega')} \qquad y = \frac{b'z\,Tg\omega''}{Sin(\omega''+\omega')} \qquad (t)$$

Si l'on conduit un pl. par ces 2 Dr. son Eq. sera

$$\{b\,Sin(\omega''+\omega') - b'\,Sin(\omega''+\omega)\}x - \{a'\,Sin(\omega''+\omega) - a\,Sin(\omega''+\omega')\}y + (ab'-ba')Tg\omega'' = 0$$

ou en développant

$$Mx + Ny + Pz = 0 \qquad (T'')$$

D'un autre côté, l'Eq. du pl. qui contient les axes de C et C' est

$$(bc'-cb')x + (ca'-ac')y + (ab'-ba')z = 0 \qquad (7)$$

laquelle, à cause de

$$c = Cos(\omega''+\omega) \qquad c' = Cos(\omega''+\omega')$$

devient en substit. et dével.

$$M_1 x + N_1 y + P_1 z = 0$$

Ces 2 pl. se coupent : et l'Eq. qu'on obtient en ajout. à (T'') le prod. de la dern. par $Tg\,\omega''$, et qui est

$$(b\,Sin\,\omega' - b'\,Sin\,\omega)x = (a\,Sin\,\omega' - a'\,Sin\,\omega)y \qquad (8)$$

est l'Eq. d'un pl. qui concourt en une même Dr. avec les 2 autres, et dont conséqᵗ. la ligne d'inters. est déterm. par (7) et (8) : or elles ne contiennent rien de relatif au cône C'', et seraient les mêmes si $\omega'' = \infty$. Donc

Th. VI. Si un cône variable est continuellemᵗ. tg. à deux autres cônes invariables, le plan qui contiendra ses lignes de contact avec eux coupera toujours le plan de leurs axes suivᵗ. une même droite, intersect. de ce dernier plan avec le pl. tg. commun aux 2 cônes. Nous appeller. cette Dr. l'axe de simil. des 2 cônes fixes.

En considérant le sommet commun des 3 cônes

comme le Centre d'une Sphère qcq. on a

Th. VII. Si un Cercle tracé sur une Sph., et variable, est touj. tg. à 2 autres fixes de la Sph., l'arc de Gr. C. conduit par ses 2 points de cont. avec eux coupe touj. l'arc de Gr. C. qui joint leurs pôles en un même point, inters. de cet arc de Gr. C. avec l'arc de Gr. C. tg. aux 2 cercl.

Ce point, Centre de Sim. des deux cercl. est facile à trouver. — on en aura 2, aux 2 extrém. d'un même diam. de la Sph.

Si le Ray. de la Sph. = ∞, on a

Th. VIII. — Même Th. que tout-à-l'heure, pour le cas du plan.

Définit. du Centre de Sim. de 2 cercles sur un plan.

De là on déduit facilemt.

Th. IX. Si une Sph. variable est touj. tg. à 2 Sph. fixes, la Dr. qui joint les points de cont. coupe touj. la Dr. qui joint les centres, et en un même point, qui est le sommet du cône circ. aux 2 Sph.

c'est le C. de Sim. des 2 Sph.

Reven. encore à nos Cônes. — L'axe de Sim. de C et C' s'obt. par la Comb. des Eq. (7) et (8), ce qui donne

$$x = \frac{a \sin\omega' - a' \sin\omega}{c \sin\omega' - c' \sin\omega} z \qquad y = \frac{b \sin\omega' - b' \sin\omega}{c \sin\omega' - c' \sin\omega} z \qquad (e'')$$

Mais il faut Rem. que tout cela est Relat. au cas où C'' touche C et C' extért. — Ces formules convient. égalt. au cas où C'' les enveloppe tous deux : car elles ne changent pas par le changemt. simultané des signes de ~~x et x~~ ω et ω'. — Donc la Dr. (e'') est celle suivt. laquelle le pl. des axes de C et C' est coupé par leurs pl. tg. ext. — Pour obtenir celle suivt. laq. ce

même pl. est coupé par leur pl. Eq. Int. communs, il suffira de changer le signe d'un qq. des angles ω, ω', ce qui donne

$$x = \frac{a \sin\omega' + a' \sin\omega}{c \sin\omega' + c' \sin\omega} z \qquad y = \frac{b \sin\omega' + b' \sin\omega}{c \sin\omega' + c' \sin\omega} z \qquad (i'')$$

Pour disting. ces 2 axes de sim. nous les appeller. axes de sim. $\left\{ \begin{matrix} \text{Ext.} \\ \text{Int.} \end{matrix} \right.$

On trouvera de même par de simples changements de lettres les axes de sim. Int. et Ext. (i') et (e'), (i) et (e) des syst. de cones C'' et C, C'' et C'. — alors si l'on fait passer un plan par (e), (e'), on trouve une cert. Eq. (E) d'un plan : si l'on veut savoir suivt. quelle droite ce pl. coupe celui des axes de C et C', on combinera (E) avec (7) ; mais si de (E) on retranche le produit de (7) par $\sin\omega''$, il vient

$$(b \sin\omega' - b' \sin\omega) x = (a \sin\omega' - a' \sin\omega) y$$

Eq. qui a lieu en même temps que les Eq. (e''), donc cette dern. dr. est sur le pl. (E). — Mais puisque (i) (i') (i'') se déduis. resp. de (e) (e') (e'') par un seul chang. de signe, on doit en conclure que les 3 Eq. qu'on déduira de (E) par les changemts. successifs et simultanés de ces signes sont les Eq. de 3 pl. (I), (I'), (I'') dont le 1er. contient (e) (i') (i'') le second (i) (e') (i''), le 3e (i) (i') (e''). Donc

Th. X. Les 3. ax. de sim. Ext. de 3 Cônes de même sommet sont sur un même pl : chacun est sur un m. pl. avec deux des ax. de sim. Int. de sorte que ces 6 axes sont sur 4 pl.

Ces 4 pl. seront les Pl. de Sim. Un est Ext. les 3 autres sont Int.

On en déduit :

Th. XI. Les C. de S. Ext. de 3 Cercl. d'une Sph. sont sur un même Gr. C. chacun est sur un m. Gr. C. avec 2 des C. de S. Int.

Ces Gr. C. peuvent s'appeler axes de Sim. des 3 cercles: un est Ext. 3 int.

Si le Rayon est infini:

Th. XII. Même Th. dans un plan.

De là aisément.

Th. XIII. Les C. de S. Ext. de 3 Sph. sont sur une même Dr. contenue dans le pl. de leurs centres: chacun est en ligne Dr. avec 2 des C. de S. int.

Ces 4 Dr. sont les ax. de S. des 4 Sph. une est Ext. 3 Int.

Th. XIV. Si une Sph. variable en touche touj. 3 fixes, le pl. des 3 points de cont. coupe le pl. des centres suivt. l'axe de Sim. des 3 Sph.

Th. XV. Les 6 C. de S. Ext. de 4 Sph., et donc les 4 ax. de S. Ext. de ces Sph. sont dans un même pl: chacun est est dans un m. pl. avec 3 des 6 C. de S. Int: de sorte que les 12 C. sont sur 16 Dr. qui sont elles-mêm. sur 5 pl.

Ces pl. sont Pl. de S. des 4 Sph. un seul est ext. 4 sont Int.

Cercle tangent à trois autres.

Emploi élégant de la Géométrie analytique.

(Gergonne).

Soient c, c', c'' trois cercles donnés de grandeur et de situation sur un même plan, et proposons-nous de trouver un 4e cercle C qui touche à la fois ces trois-là.

Il se présente assez naturellem^t^. de chercher le centre et le rayon du cercle demandé. Mais, comme on sait faire passer une circonf. par 3 points donnés, il se présente aussi assez naturellem^t^. de chercher 3 points de la circ. de ce cercle C. Nous allons même voir bientôt que ce dernier moyen de solution mérite la préférence.

Parmi les points de la circ. du cercle cherché, il y en a 3 qui se font particulièrement remarquer : ce sont ceux t, t', t'' où cette circonf. doit être touchée par les trois cercles donnés : voilà donc les points de cette circ. que nous sommes naturellem^t^. invités à découvrir.

Notre problème se trouve donc ainsi ramené au suiv^t^:

Trois cercles c, c', c'' étant donnés de grandeur et de situat. dans un plan, déterminer en quels points t t' t'' ils doivent être touchés par un 4e cercle C qui les touche tous 3.

Mais il n'est pas difficile de voir que, pourvu que l'on sache trouver le point de contact t de C avec l'un qcq. des cercles donnés ; en répétant successivem^t^. le même procédé pour chacun de ces cercles, le problème se trouvera résolu.

Au moyen de cette remarque, notre problème se trouve ramené au suivant :

3 cercles c, c', c''.... déterminer en quel point l'un d'eux est touché par un 4e cercle C qui les touche tous trois.

Il nous est facile de prononcer présentemt. sur le mérite des deux modes de solution que nous avons d'abord indiqués.

Pour parvenir à la résolution complète d'un problème, il y a inévitablemt. à exécuter un certain nombre d'opéra-tions qui dépendent de la nature de ce problème, et qu'on ne saurait, avec toute l'adresse possible, abréger et réduire indéfiniment. or, dès qu'on a le centre et le rayon du cercle cherché, le problème est à-peu-près résolu : donc la recherche de ce centre et de ce rayon doit compter toute la somme de constructions que la résolution du problème, simplifiée autant qu'elle peut l'être, peut exiger.

au contraire, si nous avons les points de contact du cercle cherché avec les 3 cercles donnés, le problème ne sera pas encore complètement résolu, et il nous restera encore à faire passer un cercle par 3 points donnés : donc il faudra moins faire pour parvenir jusques-là que pour arriver à la solution complète du problème ; donc enfin il doit être plus facile de trouver les points de contact du cercle cherché avec les 3 cercles donnés qu'il ne le serait de trouver le centre et le rayon de ce cercle.

à plus forte raison devra-t-il être plus facile de trouver un de ces points de contact que de les trouver tous trois, puisque, ce point trouvé, on n'aura encore exécuté que le tiers de la construction nécessaire pour les trouver tous trois ; puis donc que, lorsqu'ils sont connus, le problème n'est pas encore complètemt. résolu ; on peut présumer, avec beaucoup de vraisemblance, que la recherche de l'un d'eux ne comportera pas même le tiers de la compli-cation totale du problème proposé.

[Remarques sur la généralité de ces principes.]

~~occupons~~ -nous donc de la recherche du point 1"

où le cercle C touche le cercle c".

Un point est déterminé sur un plan lorsqu'on connaît deux lignes, droites ou courbes, sur lesquelles il doit se trouver.

Or, pour le point t", nous connaissons déjà une telle ligne: c'est la circonf. c". Il n'est donc plus question que d'en trouver une autre.

Notre problème se trouve donc ainsi ramené au suivant:

Trois cercles c c' c" étant donnés .... trouver une ligne qui coupe c" au point t" où il est touché par un 2e. cercle C qui touche à la fois les 2 premiers.

Mais il est essentiel de remarquer que ce dernier problème est indéterminé, puisqu'un même point peut être déterminé d'une infinité de manières différentes par l'intersection de deux lignes. — C'est de la même manière que, lorsqu'on a deux équations entre deux inconnues x et y, on peut remplacer ces deux équations d'une infinité de manières différentes, par le système de deux autres équations ayant lieu en même temps qu'elles, et donnant conséquemt. les mêmes valeurs pour les deux inconnues.

[Cette substitution d'Éq. les unes aux autres, sur laquelle on n'insiste jamais assez fortemt. est un des plus puissants moyens de l'analyse et de la Géométrie.]

Rapportons les données et les inconnues du problème à deux axes rectangulaires. — Si nous n'aspirions qu'à la plus grande symétrie possible, nous supposerions ces axes absolument quelconques. — Si au contraire nous n'aspirions qu'à la simplicité, nous pourrions placer l'origine au centre de l'un de nos cercles, et faire passer l'un des axes par le centre de l'un des deux autres.

Mais pour concilier autant qu'il est possible, la simplicité avec la symétrie, nous nous bornerons à placer le centre de l'un de nos cercles à l'origine, en donnant d'ailleurs aux axes une direction qcq. par rapport aux deux autres.

Quant au choix du cercle qui aura son centre à l'origine, il ne pourrait être douteux ; et l'on sent que ce doit être c'' puisqu'il joue un rôle particulier, dans le problème auquel nous avons réduit le problème proposé.

Soient donc respectivem^{t}. r r' r'' les rayons des cercles c c' c'' : soient a b les coordonnées du centre de c, et soient a' b' celles du centre de c'.

Soit R le rayon du cercle C, et soient A B les coordonnées inconnues de son centre. Soient enfin x y les coordonnées in-connues du point t'' où C touche c'' ; ce qui donnera une pre-mière équation

$$x^2 + y^2 = r''^2 \qquad (1)$$

Supposons, pour fixer les idées, que tous les contacts doivent être extérieurs : il faudra pour cela que la distance du centre de C au centre de chacun des cercles c c' c'' soit égale à la somme de leurs rayons, ce qui donnera :

$$(A-a)^2 + (B-b)^2 = (R+r)^2 \qquad (2)$$

$$(A-a')^2 + (B-b')^2 = (R+r')^2 \qquad (3)$$

$$A^2 + B^2 = (R+r'')^2 \qquad (4)$$

et telles sont les éq. qui résoudraient le problème si nous voulions prendre pour inconnues les coordonnées du centre et le rayon du cercle cherché.

avant d'aller plus loin, nous observerons que, dans le cas où le cercle C devrait envelopper quelqu'un des cercles c c' c'' ou en être enveloppé, ce serait la différence des rayons, et non leur somme, qui devrait être égale à la distance des centres ; il faudrait donc changer les signes de quelques uns des rayons r r' r'' ou simplem^{t}. ou bien changer quelque part le signe de R. on peut observer au surplus que chacun des binômes $R+r$, $R+r'$, $R+r''$ se trouvant élevé au carré, l'un de ces changements équivaut à l'autre : et l'on voit qu'en variant de toutes les manières possibles

les Signes de $r\ r'r''$ le probl. aura 8 Solut. comme il est d'ailleurs aisé de s'en convaincre à priori. — Nous conserverons néanmoins le Signe + aux 3 Rayons, en nous Rappelant, dans le Résultat final, qu'ils peuvent être indifférent. 20.

Lorsque la mise en Eq. d'un probl. conduit Imméd^t. à plusieurs Eq. entre plusieurs Inconnues ; la 1re chose à faire est de Examiner si, en combinant ces Eq. entre Elles d'une manière convenable, on ne peut pas en déduire quelques autres plus Simples ; car c'est Souvent là un moyen très. propre à Simplifier la Recherche dont on s'occupe.

En appliq^t. ces Réflexions aux Eq. (2) (3) (4) on voit sur-le-champ qu'on Simplifiera notablem^t. les deux premières en leur Substituant leurs Différences avec la 3e. ; lesquelles sont, en Réduisant et Transposant

$$2aA + 2bB - 2(r''-r)R = a^2+b^2+(r''-r)(r''+r) \quad (5)$$

$$2a'A + 2b'B - 2(r''-r')R = a'^2+b'^2+(r''-r')(r''+r') \quad (6)$$

on peut encore Introduire dans ces Eq. une Simplificat. très. propre à faciliter l'Elimination de R entre elles et l'Eq. (4). c'est d'y Introduire $R+r''$, qui entre Seul dans celle-ci ; Elles deviendront ainsi

$$2aA+2bB - 2(r''-r)(R+r'') = a^2+b^2-(r''-r)^2 \quad (7)$$

$$2a'A+2b'B - 2(r''-r')(R+r'') = a'^2+b'^2-(r''-r')^2 \quad (8)$$

Celles sont donc, avec l'Eq. (4), les Eq. les plus Simples qu'on puisse Employer pour parvenir aux coordonnées du centre et au Rayon du cercle cherché.

Mais ce ne sont point ces coordonnées et ce Rayon que nous nous sommes déterminés à prendre pour Inconnues : ce sont les coordonnées x et y du point de contact t'' de C avec c'', entre lesquelles nous avons déjà l'Eq. (1). cherchons donc à lier ces nouvelles Inconnues avec celles des Eq. (4, 7, 8) afin de pouvoir éliminer ces dernières.

Or le point t'' est en ligne droite avec l'origine et le centre c, d'où il suit qu'on doit avoir

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \quad \text{ou} \quad yA = xB \qquad (9)$$

Si présentement on élimine A, B, $R+r''$ entre les 4 Eq. (4, 7, 4, 9) l'Eq. en x et y qui en résultera sera celle d'une certaine ligne qui coupera le cercle donné c'' au point cherché t''.

Si cette Eq. était trop compliquée, on pourrait tenter de la simplifier à l'aide de l'Eq. (1) qui, pour le point t'', doit avoir lieu en même temps qu'elle, ce qui reviendrait à substituer à la ligne cherchée une autre ligne plus simple, coupant comme elle le cercle c'' au point t''.

Mais rien n'empêche d'effectuer cette combinaison dans le courant même de l'élimination, afin d'en rendre le résultat le plus simple possible. On peut remarquer d'ailleurs que nous avons proprement cinq inconnues, A B R x y liées par les Eq. (1, 4, 7, 8, 9) et que conséquemment nous pourrons faire de ces Eq. qui ont lieu en même temps, telle combinaison qu'il nous plaira.

Des Eq. (4) et (9) on tire

$$A = \frac{x(R+r'')}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad B = \frac{y(R+r'')}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ou plus simplement en ayant égard à l'Eq. (1)

$$A = \frac{x(R+r'')}{r''} \qquad B = \frac{y(R+r'')}{r''}$$

Substituant ces valeurs dans les Eq. (7) et (9), elles deviendront

$$2\{ax+by-r''(r''-r)\}(R+r'') = r''\{a^2+b^2-(r''-r)^2\}$$

$$2\{a'x+b'y-r''(r''-r')\}(R+r'') = r''\{a'^2+b'^2-(r''-r')^2\}$$

d'où l'on tire enfin, par l'élimination de $R+r''$

$$\frac{ax+by-r''(r''-r)}{a^2+b^2-(r''-r)^2} = \frac{a'x+b'y-r''(r''-r')}{a'^2+b'^2-(r''-r')^2} \qquad (10)$$

Telle est donc l'Eq. d'une ligne qui coupe le cercle c''

au point cherché t'' : puis donc que cette Eq. est du 1er. degré seulemt. la ligne dont il s'agit est une ligne droite.

Mais une ligne droite coupe un cercle en deux points : et il importe de savoir, avant d'aller plus loin, quels problèmes résoudront ces deux points. Pour cela rappelons-nous que nous avons écrit nos Eq. primitives dans l'Hypothèse que tous les contacts étaient extérieurs, et que nous avons observé que l'on passerait de cette hypothèse aux autres par le simple changemt. des signes de r r' r'', ce qui peut avoir lieu de huit manières différentes.

Mais il est aisé de voir, par la forme de l'Eq. (10), qu'elle ne change pas lorsqu'on y change à la fois les signes des 3 Rayons : d'où il résulte que les 8 cas que présentent les variations de signes de ces 3 Rayons ne peuvent lui faire prendre que 4 formes différentes : et que, sous chaque forme, elle résout deux problèmes absolumt. opposés ; elle résout donc, sous la forme qu'elle a ici, et le cas où le cercle cherché doit toucher Extérieuremt. les 3 cercles donnés, et le cas où il doit les envelopper tous.

On pourrait présentemt. par la combinaison des Eq. (1, 10) parvenir à la connaissance des coordonnées x et y du point t''. Ces valeurs seraient compliquées de radicaux, et on les construirait par les procédés connus. Mais nous allons bientôt voir qu'il s'en faut que ce soit là le meilleur parti à prendre.

Lorsqu'un point est donné par deux Equations entre ses coordonnées, au lieu de résoudre ces Eq. il est souvt. incomparablemt. plus commode de construire les lignes qu'elles Expriment, et dont l'intersection doit déterminer le point cherché.

Nous pouvons donc réduire la recherche du point t'' à la construction des lignes représentées par les Eq. (1) et (10). Mais la 1re. est toute construite : c'est la circonf. donnée c'' : il ne s'agit donc que de construire l'autre.

Pour construire cette droite on pourrait chercher les Longueurs

des segments qu'elle détermine sur les axes, et construire ensuite ces deux segments : mais ce n'est point encore là le meilleur parti à prendre.

[Car on ne doit réputer bonnes les constructions déduites de la Géométrie analytique qu'autant qu'on est parvenu à les rendre, tout-à-fait indépendantes de la situation des axes. Mais la Géométrie analytique, convenablemt. employée, peut toujours en offrir de telles, et alors elles sont bien supérieures, par l'élégance et la simplicité, à celles de la Géométrie pure, ou même de ce que Mr. Carnot appelle Géométrie Mixte).

Pour construire une droite, il est nécessaire et il suffit de connaître deux points de sa direction; on sait d'ailleurs qu'on reconnaît qu'un point est sur une droite lorsque ses coordonnées rendent identique l'Eq. de cette droite.

Donc si l'on trouve deux relations entre x et y en vertu desquelles ~~les~~ l'Eq. d'une droite devienne identique : les valeurs de x et de y déduites de ces relations seront les coordonnées d'un point de cette droite.

Or on a deux manières bien simples de rendre identique l'Eq. (10). La 1re. est de supposer ses deux membres nuls, la 2de. est de les rendre égaux à l'unité.

On obtient ainsi les deux couples d'Eq.

$$\begin{cases} ax+by = r''(r''-r) & (11) \\ a'x+b'y = r''(r''-r') & (12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x-a)+b(y-b) = r(r''-r) & (13) \\ a'(x-a')+b'(y-b') = r'(r''-r') & (14) \end{cases}$$

Donc les valeurs de x et de y, déduites des Eq. (11, 12) sont les coordonnées d'un point de la droite (10) : et il en est de même des valeurs de x et de y déduites des Eq. (13, 14).

On pourrait donc chercher ces deux systèmes de valeurs et les construire : on aurait ainsi deux points de la droite (10) qui se trouverait par là complètemt. déterminée. Mais on

peut faire mieux encore.

Pour déterminer le point exprimé par les Eq. (11, 12), ce qu'il y a de mieux à faire est de construire les droites que ces deux Eq. représentent, et qui par leur intersection, déterminent le point cherché. on en peut dire autant du point représenté par les Eq. (13, 14), lequel ne sera autre que l'intersection des droites que ces deux Eq. représentent. Tout se réduit donc à savoir quelles sont les 4 droites que ces Eq. repré-sentent les Eq. (11, 12, 13, 14).

Mais, comme il est d'ailleurs évident que les droites (12, 14) sont situées par rapport aux cercles c' c'' de la même manière que le sont les droites (11, 13) par rapport aux cercles c c''; il nous suffira de nous occuper de ces dernières, que l'on reconnaît d'ailleurs pour des droites parallèles entre elles, et perp. à la droite qui joint les cen-tres des deux cercles.

Nous pouvons remarquer en outre que l'Eq. (11) devient l'Eq. (13) en y changeant resp. x et y en $a-x$ et $b-y$, et en permutant entre eux les deux rayons r r''; d'où il est facile de conclure que la droite (13) est, par rapport au cercle c, ce qu'est la droite (11) par rapport au cercle c''. Tout se réduit donc à savoir quelle est cette dernière droite.

On sait qu'en prenant sur le cercle c'' un point dont les coordonnées soient x' y', et soient conséquemment liées par la relation

$$x'^2 + y'^2 = r''^2 \qquad (m)$$

l'Eq. de la tangente à ce cercle en un point est

$$xx' + yy' = r''^2 \quad \text{ou} \quad y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r''^2}{y'}$$

et cette tangente est indéterminée, puisque x' et y' ne sont liés que par l'Eq. (m). Si, pour la déterminer, on veut qu'elle touche aussi le cercle c, il faudra exprimer que la perp. abaissée sur elle du centre de ce cercle est égale à

son rayon, ce qui donnera

$$\pm\frac{b+\frac{x'}{y'}a-\frac{r''^2}{y'}}{\sqrt{1+\frac{x'^2}{y'^2}}}=r \quad \text{ou} \quad ax'+by'-r''^2=-r\sqrt{x'^2+y'^2}$$

ou, en ayant égard à l'Eq. (m)

$$ax'+by'=r''(r''-r) \qquad (n)$$

C'est donc en combinant entre elles les Eq. (m, n) qu'on obtiendra les coordonnées du point où la Tg. commune à c et c'' touche c''; et, puisque l'Eq. (m) est du 2^d. degré, il y aura deux pareilles tangentes, et conséquem^t. deux points de contact.

Mais, au lieu de résoudre les Eq. (m, n), il reviendra au même et il sera plus commode de construire les deux lignes qu'elles expriment, et dont les intersections donneront les points de contact demandés; puis donc que l'une (m) est le cercle c'' lui-même, l'autre (n) qui est du premier degré doit être celle d'une droite qui joint les points où il est touché par les tangentes communes à ce cercle et à c: or (n) est la même chose que (11); donc (11) est l'Eq. de la corde de contact avec c'' des tangentes communes à c et c''. Donc (13) est l'Eq. de la corde de contact des mêmes tangentes avec c: donc enfin (12) et (14) sont les cordes de contact avec c'' et c' des tangentes communes à ces deux cercles.

Voici donc à quoi se réduit la construction du problème. Soient menées les tangentes communes extérieures à nos 3 cercles pris deux à deux, et les cordes de contact de ces tangentes avec chaque cercle. Les deux cordes de contact sur c se couperont en M et leurs parallèles sur c' et c'' en N. Les deux cordes de contact sur c', se couperont en M' et leurs parallèles sur c'' et c en N'. Les deux cordes de contact sur c'' se couperont en M'' et leurs parallèles sur c et c' en N''. — Soient menées MN, M'N', M''N''. MN coupera

c en t et θ, $M'N'$ coupera c' en t' et θ', et $M''N''$ coupera c'' en t'' et θ''. Faisant ensuite passer deux cercles, l'un par $t\ t'\ t''$, l'autre par $\theta\ \theta'\ \theta''$, ces deux cercles rempliront les conditions du problème.

On peut remarquer au surplus que les centres de ces deux cercles seront faciles à déterminer. car ils se trouveront à l'intersection des droites menées des centres des cercles donnés soit aux 3 points $t\ t'\ t''$, soit aux 3 points $\theta\ \theta'\ \theta''$.

On se convaincra facilem^t. d'après tout ce qui a été dit ci-dessus que, pour obtenir les six autres solutions dont le problème est susceptible, il ne s'agit que de substituer tour-à-tour à deux des couples de tangentes extérieures les couples de tangentes qui se croisent entre les deux cercles qu'elles touchent à la fois.

En vain objecterait-on que, lorsque deux des cercles donnés sont l'un dans l'autre, en tout ou en partie, ces constructions sont en défaut, puisqu'alors ils n'ont plus de tangentes intérieures communes et peuvent même n'en point avoir d'extérieures : on peut observer en effet qu'alors même les droites (11, 12, 13, 14) ne cessent point pour cela d'être réelles, et peuvent toujours être construites. – On peut même définir les droites (11, 13) indépendam^t. de toute considération de tangentes en disant que ce sont des cordes ayant pour pole commun le centre de similitude de c et c''.

On peut modifier un peu les constructions auxquelles nous venons de parvenir, de la manière suivante :

au lieu de supposer les deux membres de l'Eq. (10) égaux à 1, on peut les supposer égaux à 2, ce qui donnera

$$\left\{\begin{array}{ll} 2ax+2by-a^2-b^2=r''^2-r^2 & (15) \\ 2a'x+2b'y-a'^2-b'^2=r''^2-r'^2 & (16) \end{array}\right.$$

Eq. qui pourront Remplacer les Eq. (13, 14) et qu'on Reconnaîtra aisément pour celles des axes Radicaux tant des deux cercles c et c'' que des deux cercles c' et c''. le point qu'elles détermineront sera donc le Centre Radical des trois cercles : et nous le Représenterons par O.

On pourra donc Remplacer par la Recherche de ce point O celle des points N N' N''; de sorte qu'en menant simplemt. OM, OM', OM'', elles détermineront sur c c' c'' les six points t θ t' θ' t'' θ''.

Ceci prouve au surplus que les droites MN, M'N', M''N'' concourent en un même point, qui est le centre Radical des 3 cercles.

Cette seconde construction n'est guères plus simple que la première. Mais elle a sur elle le précieux avantage de s'appliquer littéralement à la Recherche d'un cercle qui en touche 3 autres sur la surface de la Sphère (Voy. annales de Gerg. T IV. p. 349).

On déduira de tout ceci la construction des 9 autres problèmes de Viète, en supposant successivt. les Rayons des cercles nuls ou infinis.

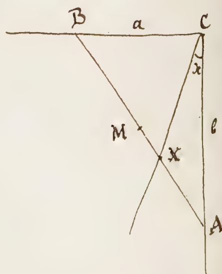
On traitera Exactemt. de la même manière et par les mêmes principes, le problème où il sera question de décrire une Sphère qui en touche 4 autres : et l'on arrivera à des Constructions tout-à-fait analogues.

Voir, pour d'autres applications des mêmes principes, les annales de Gerg. V. III, p. 293 et V. V, p. 61 : et V. VII, p. 325.

Cadrans solaires.

Construction simple d'un cadran solaire horizontal, pour une latitude quelconque.

Soit C le centre d'un cadran horizontal, c.a.d. le point où ce cadran est rencontré par le style, que l'on sait d'ailleurs devoir être, dans un cadran qcq. dirigé vers le pole. Soit CA la méridienne, ou la projection du style, et CB une perp. à cette méridienne, et par contigt. la ligne de 6 heures. — On sait que, dans le cadran horizontal, les lignes horaires qui répondent à des heures également distantes de part et d'autre de midi, font aussi de part et d'autre des angles égaux avec la méridienne. On sait en outre que les lignes horaires qui répondent aux heures qui précèdent 6 h. du matin ou qui suivent 6 h. du soir ne sont que les prolongements respectifs de celles qui appartiennent aux heures correspondantes d'avant 6 h. du soir ou d'après 6 h. du matin. Ainsi tout se réduit à savoir tracer les lignes horaires qui répondent aux heures comprises entre midi et 6 h. du soir.



Soit CX une de ces lignes horaires répondant à une heure donnée qcq. comprise entre ces limites. Soit menée une droite arbitraire AB joignant un point qcq. de la méridienne à un point qcq. de la ligne de 6 h. La ligne horaire CX sera connue si nous connaissons en quel point X elle coupe la droite AB que nous supposons fixe: et ce point X sera connu à son tour si nous parvenons à déterminer sa distance AX au point A. Cherchons donc l'expression de cette distance.

Soit $CB = a$, $CA = b$, $AB = c$: d'où

$$a^2 + b^2 = c^2$$

on aura

$$\text{Sin } CBA = \frac{b}{c} \qquad \text{Cos } CBA = \frac{a}{c}$$

Soit fait angle $ACX = x$; d'où

$$\text{Sin } XCB = \text{Cos } x \qquad \text{Cos } XCB = \text{Sin } x$$

Nous aurons

$$\text{Sin } CXA = \text{Sin}(XCB + XBC) = \text{Sin } XCB \text{ Cos } XBC + \text{Sin } XBC \text{ Cos } XCB$$

c.a.d.
$$\text{Sin } CXA = \frac{a \text{ Cos } x + b \text{ Sin } x}{c}$$

Mais à cause de la proportionnalité des Sinus des angles aux côtés qui leur sont opposés, on a

$$AC = AX \frac{\text{Sin } ACX}{\text{Sin } CXA} = b \frac{\text{Sin } x}{\text{Sin } CXA}$$

Ce qui donnera en substituant

$$AX = \frac{bc \text{ Sin } x}{a \text{ Cos } x + b \text{ Sin } x} = \frac{bc \text{ Tg } x}{a + b \text{ Tg } x}$$

Cela posé, concevons une Sphère qui ait son centre au centre C du cadran. La méridienne CA, la ligne horaire CX et la direction du style détermineront sur cette sphère les sommets d'un triangle sphérique rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit, sera la hauteur du pôle ou la latitude du lieu, l'autre, l'arc qui mesure l'angle inconnu x, et l'angle oblique opposé à ce dernier l'angle horaire qui répond à l'heure indiquée par AX, à raison de 15°. par heure.

Designant donc cet angle horaire par h, et la latitude du lieu par λ, nous aurons, par les théories connues,

$$\text{Tg } x = \text{Sin } \lambda \text{ Tg } h$$

Cette valeur étant substituée dans celle de AX ci-dessus, elle deviendra enfin

$$AX = \frac{bc \text{ Sin } \lambda \text{ Tg } h}{a + b \text{ Sin } \lambda \text{ Tg } h}$$

Si ensuite on désigne par M le milieu de AB, on aura

$$MX = AM - AX = \frac{1}{2}c - AX$$

c.à.d. en substituant et réduisant

$$MX = \frac{1}{2}c\,\frac{a - b \operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Tg} h}{a + b \operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Tg} h} \qquad (2)$$

Or la transversale $AB = c$ étant arbitraire, et les grandeurs a b c ne se trouvant conséquemment liées entre elles que par la seule Relation (1), il nous est permis de les lier encore par deux autres Relations; ou, ce qui revient au même, nous pouvons supposer c constant et donné et établir une nouvelle Relation entre a et b; et c'est à ce dernier parti que nous nous arrêterons.

Or l'inspection de la formule (2) montre que parmi toutes les Relations que nous pourrions choisir, celle que nous devons préférer est

$$a = b \operatorname{Sin}\lambda \qquad (3)$$

Car alors cette formule (2) devient simplement.

$$MX = \frac{1}{2}c\,\frac{1 - \operatorname{Tg} h}{1 + \operatorname{Tg} h}$$

c.à.d.

$$MX = \frac{1}{2}c \operatorname{Tg}(45^\circ - h) \qquad (4)$$

D'un autre côté, en combinant entre elles les Relations (1, 3) pour en éliminer b, il vient

$$a = \frac{c \operatorname{Sin}\lambda}{\sqrt{1 + \operatorname{Sin}^2\lambda}}$$

De sorte que si l'on fait

$$\operatorname{Sin}\lambda = \operatorname{Tg}\varphi \qquad (5)$$

φ étant un angle auxiliaire, on aura

$$a = c\,\frac{\operatorname{Tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{Tg}^2\varphi}} = c \operatorname{Sin}\varphi$$

c.à.d.

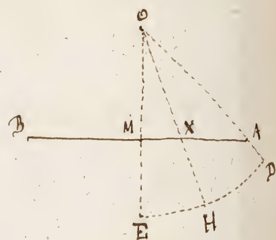
$$CB = c \operatorname{Sin}\operatorname{arc}(\operatorname{Tg} = \operatorname{Sin}\lambda) \qquad (6)$$

Présentem.t on peut remarquer, et c'est précisém.t en ceci que consiste le mérite de la méthode ; on peut rem., dis-je que $AB = c$ étant pris d'une longueur arbitraire, mais déterminée et constante, ainsi que nous venons de le supposer plus haut, MX se trouve tout-à-fait indépendant de la latitude et CB de l'angle horaire. Ainsi, pour toutes les latitudes, on pourra employer une même règle ou échelle AB sur laquelle seront marqués, une fois pour toutes, les points X qui répondent aux diverses lignes horaires qu'on se propose de tracer sur le cadran ; et au moyen d'une autre règle où seraient aussi marqués, une fois pour toutes, les points B qui répondent aux diverses latitudes, et qu'on appliquera le long de CB ; il ne s'agira, pour une latitude donnée que de fixer l'extrémité B de la première règle au point de celle-ci qui répondra à cette latitude. (x) Tout se réduit donc à diviser les deux règles, et nous allons bientôt voir que rien n'est plus facile.

I. Construction de l'échelle des heures. — Avant d'enseigner à construire cette échelle, nous ferons remarquer 1°. que si l'on pose $h = 45°$, ainsi qu'il arrive à 3 heures, la formule (4) donne $MX = 0$; 2°. que si l'on pose successivem.t $h = 45° - k$, $h = 45° + k$, il viendra $MX = \frac{1}{2} c \, Tg k$, $MX = -\frac{1}{2} c \, Tg k$, valeurs qui ne diffèrent que par le signe. Ainsi, lorsque la règle AB est disposée de la manière qui convient à la latitude, 1°. la ligne de 3 h. doit passer par son milieu M ; 2°. les lignes horaires également distantes de part et d'autre de 3 heures coupent cette règle en des points symétriquement disposés de part et d'autre du point M.

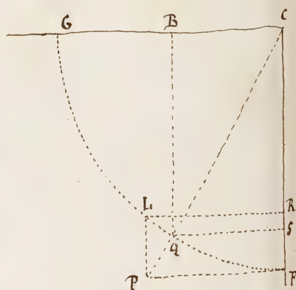
(x) On peut même construire sur ce principe un système de règles en bois, ou mieux en cuivre, qui faciliterait beaucoup l'opération. Deux de ces règles, CA, CB, tout-à-fait fixes et d'une longueur arbitraire, seraient perp. l'une à l'autre ; la 3e. AB d'une longueur invariable, et ayant toujours ses extrémités sur les deux premières, ne devrait changer de situation, dans l'angle ACB, que pour un changem.t de latitude : enfin la 4e. CX, d'une longueur indéfinie, et ne pouvant que tourner autour du point C, pourrait se fixer à tous les points de AB, et dirigerait le crayon dans le tracé des lignes horaires.

on voit donc que tout se réduit à diviser la moitié de cette règle, en répétant les divisions pour une dans un ordre rétrograde pour l'autre moitié. — or la formule (4) montre que l'opération se réduit à ce qui suit : soit MA la moitié de cette règle. soit élevée au point M la perp. MO = MA, et soit menée OA. alors, pour avoir le point de MA qui répond à une heure donnée, on mènera par O une droite faisant avec OA un angle égal à l'angle horaire correspondant; et l'intersection X de cette droite avec MA sera le point cherché : car on aura $MX = OM\,tg\,MOX = \frac{1}{2}c\,tg(AOM - AOX) = \frac{1}{2}c\,tg(45° - h)$.



En décrivant donc, entre les côtés de l'angle AOM, et d'un rayon qcq. le $\frac{1}{2}$ quadrant DE, divisant ce $\frac{1}{2}$ quadrant en 3, 6 ou 12 parties égales suivant qu'on voudra marquer les heures, les demi-heures ou les quart-d'heures, et menant des droites du point O au point de division, ces droites détermineront les divisions de MA, qu'il faudra ensuite porter sur son prolongement vers B.

II. Construction de l'Echelle des latitudes. — au point C de CB soit menée à cette droite une perp. CF = AB = c, et soit menée à CB, par le point F, la parallèle indéfinie FP. Du point C comme centre et avec le rayon CF soit décrit le quadrant FLG. alors, pour obtenir le point de division B de CB qui répond à une latitude donnée, on prendra sur FG, de F en L, un arc égal à cette latitude; on abaissera la perp. LP sur FP, on mènera CP coupant FL en Q; enfin, en abaissant QB perp. sur CB, son pied B sera le point demandé. — En effet, en menant LR et QS perp. sur CF, on aura



$$CB = SQ = CQ \sin FQ = CF \sin \text{arc}(tg = FP)$$
$$= CF \sin \text{arc}\, tg.LR = CF \sin \text{arc}\, tg \sin FL$$

c.à.d.

$$CB = c \sin \text{arc}\, tg \sin \lambda$$

comme l'exige la formule (6).

On peut du reste à ces constructions substituer les suivantes, qui se présentent moins naturellem.t à la vérité, mais qui ont peut-être l'avantage de donner les points de division des deux échelles d'une manière moins confuse.

I. Echelle des heures. Sur MA comme rayon soit décrit le quadrant AHO et menée la corde AKO : soit pris l'arc AH double de l'angle horaire, soit menée BH coupant AO en K : le pied X de la perp. abaissée de ce point K sur MA sera le point cherché.

II. Echelle des Latitudes. Sur la ligne de six heures, soit prise une partie CT = AB ; sur sa moitié IC soit décrit le quadrant CLN. soit pris l'arc CL égal à la Latitude, soit menée LU, parallèle à CT et coupant IN en U ; soit menée TU, prolongée jusqu'à la circ. en V ; décrivant alors un arc du point C comme centre et avec le rayon CV, cet arc déterminera sur CT le point B cherché.

Il est facile de s'assurer que ces constructions reviennent aux précédentes.

III. Réduction en Tables. — Quelque simples que puissent paraître les constructions précédentes, elles présentent, comme tous les procédés graphiques, l'inconvénient de n'offrir qu'une précision subordonnée à l'adresse de celui qui opère, et, dans tous les cas, très-limitée. — Il est donc utile de réduire en Tables les divisions des deux Echelles, c.à.d. les deux formules 4 et 6, ce qui est très-aisé, au moyen des Tables de Sin. et de Log. — Nous supposons dans ces Tables la longueur AB ou C = 1.000.000, c.à.d. que nous supposons l'échelle des heures divisée en un million de parties égales, ce qui est plus que suffisant pour le cas même où le cadran aurait l'excessive étendue d'un mètre carré : mais on sera toujours libre de n'admettre que 100000, 10000 ... divisions dans cette Echelle, en rejetant un, deux, ... chiffres sur la droite dans tous les nombres des deux Tables.

La correspondance des divisions de AB, de part et d'autre du point qui répond à 3 h. permet de donner à la 1re Table, calculée de 3 min. en 3 m. de temps, une disposition analogue à celle des Tables trigonométriques.

Table des Heures.

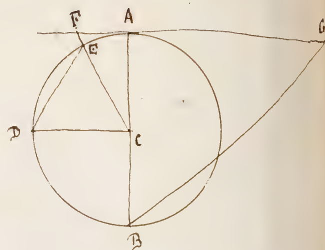
m.	0 heure.		m.	1 heure.		m.	2 heures.	
0	500 000	60	0	288 676	60	0	133 975	60
3	487 078	57	3	280 013	57	3	126 984	57
6	474 482	54	6	271 478	54	6	120 039	54
9	462 195	51	9	263 063	51	9	113 138	51
12	450 202	48	12	254 763	48	12	106 278	48
15	438 488	45	15	246 573	45	15	99 456	45
18	427 040	42	18	238 488	42	18	92 669	42
21	415 846	39	21	230 503	39	21	85 916	39
24	404 892	36	24	222 614	36	24	79 192	36
27	394 168	33	27	214 817	33	27	72 496	33
30	383 663	30	30	207 107	30	30	65 826	30
33	373 368	27	33	199 480	27	33	59 180	27
36	363 271	24	36	191 932	24	36	52 552	24
39	353 365	21	39	184 460	21	39	45 943	21
42	343 640	18	42	177 059	18	42	39 351	18
45	334 089	15	45	169 727	15	45	32 772	15
48	324 704	12	48	162 460	12	48	26 204	12
51	315 477	9	51	155 254	9	51	19 645	9
54	306 400	6	54	148 107	6	54	13 093	6
57	297 469	3	57	141 015	3	57	6 545	3
60	288 676	0	60	133 975	0	60	0	0
	5 h.	m.		4 h.	m.		3 h.	m.

Table des Latitudes.

λ	a	λ	a	λ	a	λ	a	λ	a	λ	a
1	17 438	14	235 137	27	413 382	40	540 718	53	624 046	72	689 152
2	34 880	15	250 563	28	424 968	41	549 548	54	628 959	74	693 007
3	52 263	16	265 729	29	436 243	42	556 118	55	633 688	76	696 369
4	69 587	17	280 625	30	447 213	43	563 438	56	638 230	78	699 254
5	86 827	18	295 240	31	457 878	44	570 514	57	642 594	80	701 673
6	103 959	19	309 575	32	468 238	45	577 351	58	646 782	82	703 638
7	120 984	20	323 615	33	478 300	46	583 954	59	650 404	84	705 164
8	137 847	21	337 360	34	488 109	47	590 324	60	654 653	86	706 246
9	154 557	22	350 802	35	497 529	48	596 474	62	661 972	88	706 891
10	171 088	23	363 938	36	506 740	49	602 403	64	668 467	90	707 107
11	187 429	24	376 763	37	515 640	50	608 119	66	674 471	.	. . .
12	203 561	25	389 280	38	524 267	51	613 631	68	679 904		
13	219 469	26	401 491	39	532 626	52	618 938	70	684 794		

Si l'on considère présentement que tout cadran solaire vertical ou incliné, déclinant ou non déclinant, pourvu toutefois que sa surface soit plane, est un cadran horizontal pour le point de la surface de la Terre dont le plan tangt. serait parallèle à celui de ce ~~c~~ cadran, on verra aussitôt que la méthode que nous venons de donner pour tracer un cadran horizontal est égalemt. applicable à la construction de tout cadran qcq. Il faut seulemt. substituer à la latitude du lieu celle du point du globe pour lequel le plan tangent est parallèle à celui du cadran, et avoir égard à la ~~ss~~ différence dans la manière de compter les heures qui naît de la différence entre la longitude de ce point et celui du lieu pour lequel le cadran est destiné.

Rectification approchée de la Circonférence.



Soit AB le diamètre du cercle et C son centre. Soient menés en A une Tg. indéfinie, et un Rayon CD parallèle à cette Tg. Soit DE = R = AC. CE Rencontre la Tangente en F. Soit FG = 3R. on aura sensiblem^t.

$$BG = \pi R.$$

Car

$$AF = Tg.\,30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\sqrt{1-\sin^2 30}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Donc

$$AG = FG - AF = \frac{1}{3}(9-\sqrt{3})$$

Donc enfin

$$BG = \sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AG}^2} = \sqrt{4+\frac{1}{9}(9-\sqrt{3})^2}$$

c.a.d.

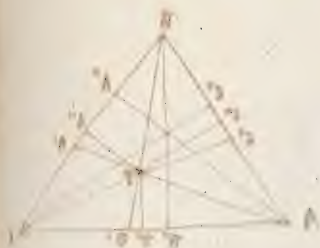
$$BG = \frac{2}{3}\sqrt{6(20-3\sqrt{3})}$$

ainsi cela revient à faire

$$\pi = \frac{1}{3}\sqrt{6(20-3\sqrt{3})}$$

Ce qui donne

$$\pi = 3,1415\,3334$$



Sur les Puissances des Nombres.

Théorème. « Toute puissance a^m d'un nombre qcq. a est égale à la somme des termes d'une progression par différence dont le premier terme est 1, le nombre des termes a, et la raison égale à la somme des termes de la progression géométrique $2+2a+2a^2+\cdots+2a^{m-2}$. »

Désignons en effet par S la somme des termes de la progression arithmétique dont il s'agit, et par d la raison de cette progression ; puisque son premier terme est 1 et le nombre de ses termes a, son dernier terme sera $1+(a-1)d$ et

$$S = [2+(a-1)d]\frac{a}{2}$$

Mais par hypothèse

$$d = 2a^0+2a+2a^2+\cdots+2a^{m-2} = 2\,\frac{a^{m-1}-1}{a-1}$$

D'où

$$(a-1)\,d = 2\,(a^{m-1}-1)$$

Substituant,

$$S = a^m$$

cqfd.

Si $m = 2$, on aura $2+2a+\cdots+2a^{m-2} = 2$, d'où

$$a^2 = 1+3+5+7+\cdots+(2a-1)$$

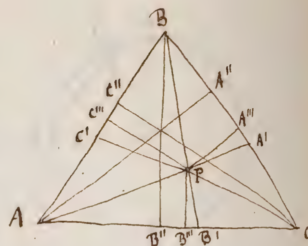
propriété connue.

Mais si $m = 3$, ce qui donne $2+2a+\cdots+2a^{m-2} = 2(1+a)$, on aura

$$a^3 = 1+(3+2a)+(5+4a)+(7+6a)+\cdots+([2a-1]+2[a-1]a)$$

ainsi $3^3 = 1+9+17$; $4^3 = 1+11+21+31$;
$5^3 = 1+13+25+37+49$; $7^3 = 1+17+33+49+65+91+107$; etc.

Théorème de Géométrie



Soit P un point qcq. dans un triangle, on aura

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} = 1$$

En effet, menons les 3 hauteurs, et, par le point P, des parallèles à ces hauteurs. — à cause des parallèles on a

$$\frac{PA'}{AA'} = \frac{PA'''}{AA''} \quad \frac{PB'}{BB'} = \frac{PB'''}{BB''} \quad \frac{PC'}{CC'} = \frac{PC'''}{CC''}$$

Mais d'un autre côté, les triangles BPC, CPA, APB se trouvant avoir une base commune avec le triangle ABC, les rapports de leurs aires à la sienne doivent être les mêmes que ceux des hauteurs: c.à.d. qu'on aura

$$\frac{PA'''}{AA''} = \frac{BPC}{BAC} \quad \frac{PB'''}{BB''} = \frac{CPA}{CBA} \quad \frac{PC'''}{CC''} = \frac{APB}{ACB}$$

ajoutant ces trois dernières equations membre à membre, et observant que $BPC + CPA + APB = ABC$, on a

$$\frac{PA'''}{AA''} + \frac{PB'''}{BB''} + \frac{PC'''}{CC''} = 1$$

ou, à cause des pères Eq.

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} = 1$$

c.q.f.d.

Rem. on a évidt. $\frac{AA'}{AA'} + \frac{BB'}{BB'} + \frac{CC'}{CC'} = 3$; retranchant de cette Eq. la précédente, on a $\frac{PA}{AA'} + \frac{PB}{BB'} + \frac{PC}{CC'} = 2$.

Même théorème et démonstration toute semblable pour le tétraèdre.

Théorème de Géométrie.

Soit O le centre du cercle inscrit à un triangle ABC (voir la fig. page suiv.). Soient menées par les sommets des perpendiculaires aux bissectrices, rencontrant les prolongements des côtés opposés respectivement en G, H, K. Sur DG, EH, FK comme diamètres soient décrits des cercles dont les centres sont L, M, N.

Cela posé :

1°. Les trois points G, H, K seront en ligne droite ;

2°. Les trois cercles passeront par les deux mêmes points P et Q : d'où il suit que

3°. Les trois centres L, M, N seront également en ligne droite.

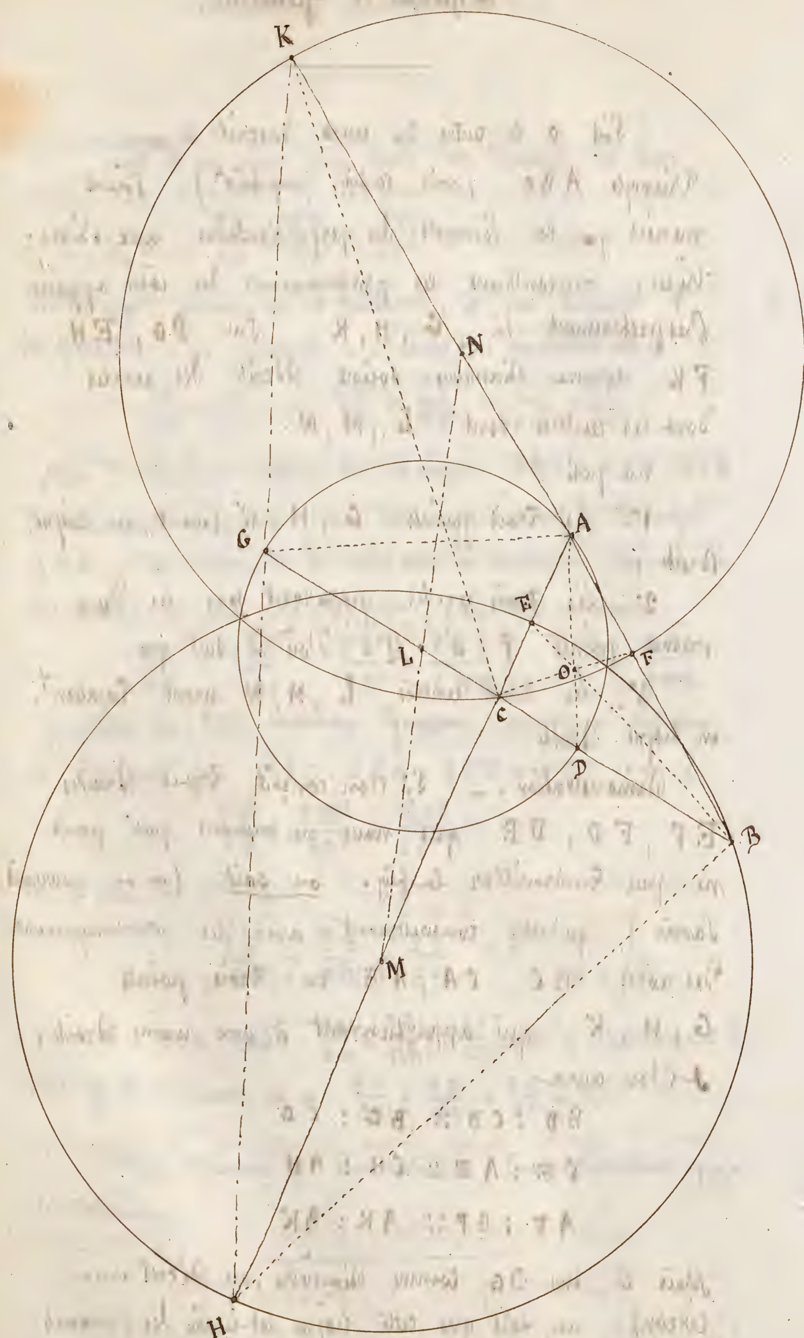
Démonstration. — Si l'on conçoit trois droites EF, FD, DE que nous ne menons pas pour ne pas embrouiller la fig. <u>on sait</u> (ou on pourrait savoir) qu'elles concourront avec les prolongements des côtés BC, CA, AB en trois points G, H, K qui appartiennent à une même droite, et l'on aura

BD : CD :: BG : CG

CE : AE :: CH : AH

AF : BF :: AK : BK

Mais si, sur DG comme diamètre, on décrit une circonf. on sait que cette ligne est le lieu des sommets de tous les triangles qui ont pour base BC et qui


K
N
G
A
E
L
F
O
C
D
B
M
H

sont tels que si l'on tire du sommet opposé à BC une droite au point D, elle sera la bissectrice de l'angle à ce sommet. Donc le circ. décrit sur GD passera par le point A : donc AG sera perp. sur AD. De même .... or K, G, H sont en ligne droite. Donc la 1ère partie est démontrée.

Pour démontrer la seconde, supposons d'abord qu'on a décrit les 2 circ. DAG, EBH, se coupant en P, Q, et montrons que la 3e. passe par ces deux points.

En effet, si l'on conçoit les droites PA, PB, PC ; comme P est sur les 2 circ. DAG, EBH, on a

$$BD : DC :: BP : PC$$

$$AE : EC :: AP : PC$$

d'où

$$AE . DC : EC . BD :: AP : BP$$

Mais on a

$$AE . DC . BF = CE . BD . AF$$

ce qui revient à

$$AE . DC : CE . BD :: AF : BF$$

Donc

$$AF : BF :: AP : BP$$

Donc P est sur la 3e. circ. – et de même Q. Donc ....

C q f d.

Théorie Géométrique

des Contacts des Cercles, Sphères, Cylindres et Cones.

Section Première.

Propriétés des Cercles sur un plan.

I

Des poles et des Polaires.

1. On appelle Poles conjugués d'un cercle deux points en ligne droite avec le centre O et tels que $PO.P'O = R^2$.

2. Donc : 1°. aucun point du plan, qui ne puisse être pris pour pôle, et auquel ne réponde un Pôle conj. dont il est le conj. 2°. de ces 2 points, un est int. l'autre ext. et ils marchent en sens inverse. 3°. Le sommet d'un angle circonscrit et le milieu de sa corde de cont. sont 2. P. C.

3. Lorsque par l'un des P. C. on menera une perp. à la droite qui les joint, cette droite s'appelle la Polaire de ce l'autre point, qui est son Pôle.

4. Donc : 1°. aucun point qui n'ait sa polaire, et Recipr. 2°. Si le pole est Ext. la Pol. est Int. et Recipr. 3°. Le sommet de l'angle circ. est le P. de la corde de contact, dont le milieu est le P. de la parall. menée par le somt. de l'angle à la corde de cont.

5. Théorème. — Le pôle d'une droite est l'Enveloppe des cordes de contact des angles circ. dont le sommet est sur la droite.

Connue.

6. Ce Th. revient à dire que l'intersect. de deux droites est le pôle de la droite qui passe par les pôles de ces deux-là. — De là un moyen commode de déterminer le P. par la P. et récipr^t.

7. Si en effet le P. est donné on mènera deux cordes qcq. qui y passent et les sommets des angles circonscr. qui auront ces cordes pour cordes de contact seront 2 points de la P. cherchée. Si au contraire c'est la P. qui est donnée, on fera de deux qcq. de ses points les sommets de deux angles circo.... etc.

II.

Des Centres et axes de Similitude.

8. Un angle est circ. à 2 cercles quand il est formé de 2 tg. commun. toutes 2 Ext. ou tout. 2. Int. — D'où angle circ. Ext. et Int. — Son sommet est touj. sur la ligne des centres.

9. J'appelle C. de S. de 2 cercles un point situé sur la ligne des centres, et tel que $\frac{co}{co'} = \frac{r}{r'}$.

10. C. de S. Int. et Ext.

11. Si les deux cercles sont Ext. il est aisé de voir que leurs C. de S. sont les sommets des angles circ. aux 2 cercles.

12. Th. Les C. de S. Ext. de 3 cercles sont en ligne droite: et chacun est en ligne dr. avec 2 des C. de S. Int. de sorte que ces 6 points sont les intersect. de 4 dr. formant un quadrilatère complet.

Soient en effet c, c', c'' les centres de 3 cercles de rayons r r' r'' ; soient e, i les C. de S. Ext. et int. de c' et c'' ; e', i' ceux de c et c'' ; e'' et i'' ceux de c et c'. — Menons par c'' une parallèle indéfinie à cc', coupant ee' en m et ii' en n. — Soit e'' l'intersection de ee' et cc'. On aura

$$ce' : c''e' \text{ ou } r : r'' :: ce'' : c''m$$

$$c''e : c'e \text{ ou } r'' : r' :: c''m : c'e''$$

Alors $r : r' :: ce'' : c'e''$

e'', interf. de ee' et cc', est donc (9) le c. de S. Ext. de c et c'. Donc cqfd.

La 2de partie se démontre de même.

13. Axe de Similit. Ext. ou Int: — c'est la ligne qui joint 3 c. de S.

14. De là, la déterm. des c. de S. de deux cercles non extérieurs: on en décrit un 3e. extérieur à tous deux, puis ... etc.

15. On pourra donc toujours déterminer les 4 axes de Sim. de 3 cercles.

III

Des Centres et axes Radicaux.

16. Centre Radical de deux cercles, défin: $\overline{oc}^2 - \overline{oc'}^2 = r^2 - r'^2$.

17. Donc 1°. Deux cercles ont toujours un C.R. et un seul; 2°. suivt. que $\overline{cc'}^2 \gtreqless r^2 - r'^2$, le C.R. est sur le prolongemt. de cc', du côté du < cercle, au centre même de celui-ci, ou entre les deux; mais toujours + près du centre du < cercle.

18. Axe Rad. de deux cercles, la perp. à cc'. menée par le C.R.

19. Si deux cercles se touchent ou se coupent, leur A.R. est leur Tg. commune ou leur Cord. comm. — facile. —

20. Th. L'axe R. est le lieu des points d'où partent des Tg. égales vers les 2 cercles. — et Réciproq.

Connu.

21. Th. Les trois axes Rad. de 3 cercles se coupent en un même point.

Évident d'après le théor. précédent.

22. C'est le Centre Rad. des 3 cercles.

23. De là un moyen de trouver l'A.R. de 2 cercles extérieurs ou Int. l'un à l'autre.

24. On saura donc toujours construire le C.R. de 3 cercles.

Section Deuxième.

Propriétés des Sphères dans l'Espace.

I.

Des Pôles, Droites et plans Polaires.

25. On appelle Pôles conjugués d'une Sphère les pôles conjugués communs à toutes les Sections circulaires faites à cette Sphère par des plans passant par l'un qcq. de ses Diamètres.

26. Lorsque, par l'un des P. C. on mène un Plan perp. à la ligne qui les joint, on a le Plan Polaire de l'autre point, qui est le Pôle de ce point.

27. Enfin on appelle Polaires conjuguées d'une Sphère deux Droites qui, passant par deux pôles conj. de cette Sph. sont perp. entre elles et à la Droite qui joint ces deux pôles.

28. Théorème. — Le pôle d'un plan est l'enveloppe des plans des Lignes de contact de tous les cônes circonscrits qui ont leurs sommets sur ce plan, et Réciproquemt.

Démonstr. aisée à conclure de celle qui a lieu dans un plan.

29. Théor. — La Polaire conj. d'une droite est l'Enveloppe des plans des lignes de contact des cônes circonscrits qui ont leurs Sommets sur cette Droite, et Récipr.t

En effet une Droite D étant située d'une manière qcq. par Rapport à une Sphère, concevons que, par cette Droite, on fasse passer arbitrairement deux plans P, P', dont les pôles soient Respect.t p, p'. Il est aisé de voir (5) que la Droite ~~D~~ d passant par ces deux points sera (27) la polaire conj. de D : or le plan de la ligne de contact de tout cône circonscrit dont le Sommet sera sur l'un ou l'autre des deux plans P P', passera par p ou p' respect.t ; et Récipr.t Donc le plan de la Ligne de cont. de tout cône circ.

dont le sommet sera à l'intér. D de ces deux plans passera par p et p', c.à.d. par la pol. conj. d de D, et Récipr^t. cqfd.

30. Lorsqu'un angle dièdre est circ. à une sphère, son arête et la corde de contact sont deux polaires conjuguées. Donc:

31. Th. Les cordes de contact des dièdres circ. dont l'arête voyage sur un plan, se coupent toutes au pôle de ce plan, et Récipr^t.

II.

Des centres, axes et plans de similitude.

32. Déf. Cône circonscrit {Extér^t. / Intér^t.} à deux sphères.

Il est clair que les sections de ces cônes par des plans passant par les deux centres seront des angles circ. aux cercles résul-tants de la même section.

33. Dièdre circonscrit à deux sphères. — Il est aussi circ. à l'un ou à l'autre des cônes circ: donc son arête passe touj. par le sommet de ce cône. Elle coupe donc la ligne des centres, et le plan de ces lignes bissecte évid^t. le dièdre. Distinction des dièdres circ. Ext^t. et Int^t.

34. Centres de simil. de deux sphères: Ext. ou Int. Ce sont les C. de S. communs à tous les syst. de 2 cercles déter-minés par les plans qui passent par les 2 centres.

35. Si les deux sph. sont exter. leurs C. de S. Int. et Ext. sont les sommets des cônes circ. et aussi les points de concours des dièdres circ. Ext. ou Int.

36. Th. Les 3 centres de S. Ext. de 3 sph. sont en ligne droite, et chacun est en ligne droite avec deux des C. de S. Int. de telle sorte que ces six points sont les intersect. de 4 droites formant un quadrilatère complet, dont le plan est celui des centres des 3 sphères. — Evident.

37. Déf. axe de Sim. de 3 Sph. : c'est toute droite qui contient 3 de leurs c. de S. axe Ext. et axes Int.

38. Pl. Tgts communs à 3 Sphères, Ext. ou Int. Un seul dièdre circonscrit Ext.t à 3 Sphères, et 3 dièdres circ. Int.

39. Th. Les c. de S. Ext. de 4 Sph. sont sur un même plan, aux inters. de 4 Dr. formt. un quadril. complet. En outre, 3 de ces C. appartenant à une même droite, et par suite relatifs à 3 mêmes Sphères, se trouvent avec les 3 C. de S. Int. relatifs à la 4e. Sphère comparée succent. aux 3 autres, situées dans un même plan, aux inters. de 4 Dr. formant encore un quadr. complet. Enfin si l'on considère 2 C. de S. Ext. dont un appartient à deux Sph. qcq. et l'autre aux 2 autres, ces 2 points seront, avec les 4 c. de S. Int. autres que ceux qui appartiennent aux deux mêmes combinaisons de 2 Sph., dans un même plan, aux Int. de 4. Dr. formt. un Qu. c. —

Cela résulte avec un peu d'attention du Th. (36).

40. Plan de Sim. de 4 Sphères : c'est tout plan qui contient 6 des 12 C. de S. Il est {Ext. / Int. / Mixte} selon qu'il contient {4 C. de S. Ext. / 4 C. de S. Int. / 3 C. de S. Ext. et 3 Int.}. Il y a {1 / 3 / 4} Pl. de S. {Ext. / Int. / Mixte}.

III.

Des Plans, axes et Centres Radicaux.

41. Centre Radical de deux Sphères.

42. Plan Radical de deux Sphères. — Cas de Sphères Tangentes ou Sécantes.

43. Th. Les 2 cônes circ. à chacune des deux Sph. qui ont leur sommet commun en un point qcq. ~~du plan~~ du

le plan Radical, ont touj., et seuls, leurs arêtes égales de part et d'autre.

44. Centre Radical de 3 Sphères : c'est celui des 3 cercles du plan des 3 centres. — Axe Radical de ces 3 Sphères : c'est la perp. au plan des centres menée par le C. R. des 3 Sph.

45. Th. Les 3 plans Radic. de 3 Sph. se coupent suivant leur axe Radical.

Evident.

46. Th. Les tangentes menées à 3 Sph. d'un point de leur axe Radical sont égales, et sont seules égales (autre énoncé avec les cônes circonscrits).

47. Th. Les six plans Radic. de 4 Sph. et par conséquent leurs 4 axes Radicaux se coupent en un même point.

48. Les tangentes aux 4 Sphères, parties de ce point unique, sont égales. — C'est leur Centre Radical.

Section Troisième.

Propriétés des Cônes et des Cylindres.

I.

Des Droites et Plans Polaires.

49. Soit un angle dièdre circ. arbitrairement à un cône qui aura conséquemment son sommet sur l'arête de cet angle ; le dièdre touchera le cône suivant deux droites formant un angle qui sera coupé perpt en deux parties égales par le plan de l'axe du cône et de l'arête du dièdre. Cela posé, si l'on coupe le cône par un plan quelq. perp. à son axe, ce plan coupera l'arête du dièdre et la droite divisant l'angle de contact en deux

parties égales, en deux points qui seront des pôles conj. du cercle résultant de la section du cône par le même plan. c'est facile à voir (2).

50. on voit donc que si l'on prend sur les diverses sections circulaires du cône une suite de pôles situés sur une même droite passant par son sommet, leurs conjugués seront aussi sur une droite passant par ce même point. Deux pareilles droites sont deux Polaires Conjuguées du cône.

51. Donc 1°. toute droite passant par le sommet a sa Pol. Conj. (et Récipr.). 2°. de 2 pol. conj. une est ext. au cône, l'autre int. 3°. L'arête d'un dièdre circonscrit et la bissectrice de l'angle de contact sont deux pol. conj.

52. Si par l'une des P. C. on mène un plan perp. à leur plan, on a le plan Polaire de l'autre droite, qui en est la polaire.

53. Conséquences 1°. aucune droite ... et Récipr[t]. 2°. Positions relatives. 3°. L'arête du dièdre circ. est la polaire du plan de l'angle de contact.

54. Th. La pol. d'un plan passant par le sommet du cône est l'enveloppe des plans des angles de contact de tous les dièdres circ. qui ont leur arête sur ce plan; et Récipr[t]. Évid[t].

55. Cela revient à dire que l'intersect. de deux plans qui passent par le sommet du cône est la Pol. du plan qui passe par les polaires de ces deux là, et Réc[t].

56. Si le sommet s'éloigne indéfin[t]. on a un cylindre. définitions auxquelles on est conduit.

57. Th. (le même que le Th. 54, pour le Cylindre).

II
Des axes et Plans de Similitude.

58. angle dièdre circ. Ext. ou Int. à 2 cônes de même sommet.

son arête passe par le sommet commun et est dans le plan des deux axes.

59. Lemme. Si deux sphères variables sont continuellemt. inscrites à deux cônes de même sommet, leurs C. de S., ext. et int., ne sortiront pas de deux droites fixes, passant par le sommet commun des deux cônes, et situées dans le plan des axes.

Très-aisé à démontrer pour deux cercles variables inscrits dans deux angles de même sommet; donc aussi pour deux sphères.

60. Déf. : axes de similit., Ext. et Int. (cette dénomin. est impropre, car il n'y a que 2 cônes égaux qui soient semblables. Mais c'est par analogie.)

61. Si les 2 cônes sont extérieurs, leurs A. de S. Int. et Ext. sont (58) les arêtes des dièdres Int. et Ext. circ. à ces cônes.

62. Th. Les A. de S. Ext. de 3 cônes de même sommet sont dans un même plan, et chacun est dans un même plan avec deux des axes de Sim. Int. De sorte que ces six droites sont les intersect. de 4 plans formant un tétraèdre complet.

Évident.

63. Déf., Déf. Plan de Sim. de 3 cônes, Ext. et Int.

64. A. de S. de 2 cylindres parallèles, Int. et Ext.

65. Th. c'est l'analogue de 62.

66. Plans de Sim. des cylindres.

III.

Des axes et plans radicaux.

67. Lemme. Si deux sphères sont respectivemt. inscrites à deux cônes de même sommet, de telle sorte que les arêtes des deux cônes terminées à leurs lignes de contact avec les sphères, soient égales de part et d'autre: quel que soit le système

des deux Sphères, elles auront toujours le même plan Radical, passant par le sommet commun des deux Cônes.
ainsi à démontrer pour un plan. donc ...

68. Plan Radical de deux cônes. — L'intersection de ce plan avec celui des axes est l'axe Radical des deux cones. — Si deux cônes se touchent ou se coupent, le plan Radical devient ...

69. Th. Si, par le Sommet commun de deux Cones, on mène arbitrairemt. une droite dans leur plan Radical; et que par cette droite on conduise des plans tangents aux deux cônes, les lignes de contact de ces plans feront des angles égaux avec la droite dont il s'agit; et Réciproquemt. si les lignes de contact ....

70. Th. Les plans Radicaux de trois cones de même Sommt. se coupent suivant une même droite.

71. Cette droite est leur axe Radical.

72. Cas des Cylindres. — Définitions.

73. Th. Les lignes de contact avec 2 cyl. à axes parallèles de deux plans tangents qui partent d'une même droite parallèle à ces axes tracée sur le plan Radical, sont également distantes de cette droite, et Réciproqt.

74. Th. Les plans Radicaux de 3 cylindres à axes parallèles se coupent suivt. une même droite.

75. Cette droite est leur axe Radical.

Section Quatrième.

Propriétés des cercles sur la Sphère.

I

des Poles et arcs Polaires.

76. on appelle Poles conjugués d'un cercle de la Sphère les deux points où elle est Rencontrée par deux polaires

conjuguées d'un cône qui, ayant son sommet au centre de la Sphère, passera par ce cercle. _ arc de Grand cercle Polaire d'un point, et Pôle d'un arc de Grand cercle.

77. Th. Le pôle d'un arc de Gr. cercle est l'enveloppe ... et Réciproquem^t.

C'est une conséquence de (54).

78. Si R = ∞ on Retrouve (5).

II.

Des Centres et axes de Similitude.

79. Le C. de S. de 2 cercles de la Sphère est le point de sa Surface où elle est Rencontrée par l'un des axes de Sim. de deux cônes ayant pour Sommet le centre de la Sphère, et pour Bases les deux cercles. – C. de S. Int. et Ext. – Si les deux cercles sont ext. leurs C. de S. sont ....

80. Comme 2 grands cercles se coupent en deux points opposés, deux petits cercles ont Réellem^t. 2 C. de S. Ext. et 2 Int. _ on n'en considerera qu'un Seul.

81. Th. Les C. de S. Ext. de 3 cercles sont sur un même arc de Gr. Cercle; et chacun d'eux ....

Cela Résulte de (62).

82. Déf. axe de Sim. Ext. et Int.

83. Détermination (au moyen de 81 et de l'observat. de la fin de 79) des C. de S. de 2 Int. et Ext. de deux cercles qcq.

84. Si R = ∞, on a (12).

III.

Des Centres et axes Radicaux.

85. Déf. Centre Radical de 2 Cercles: c'est le point

où la Sphère est percée par l'A. R. de deux cônes …

axe Radical : c'est l'arc de Gr. cercle … (c'est aussi l'intersect. de la Sphère par le Plan Radical des deux cônes).

Si les cercles se touchent ou se coupent …

86. Th. Les arcs de gr. cercles … sont égaux.

cela résulte de (69).

87. Th. Les axes Rad. de 3 cercles d'une Sphère se coupent en un même point.

voir (70).

88. Ce point est leur Centre Radical. — Il y en a Réellemt. deux opposés.

89. au moyen de (87) et de (85), on pourra touj. trouver l'axe Radical de deux cercles.

90. Si $R = \infty$, on a (20) (21).

Section Cinquième.

Théorèmes et Problèmes sur les Contacts.

I.

Contacts des Cercles, et Cercle Tg. à 3 autres, sur un plan.

91. Polaires de Sim. de 2 cercles : 2 droites ayt. pour pôle commun l'un des C. de S. Ces Polaires sont Int. ou Ext. …

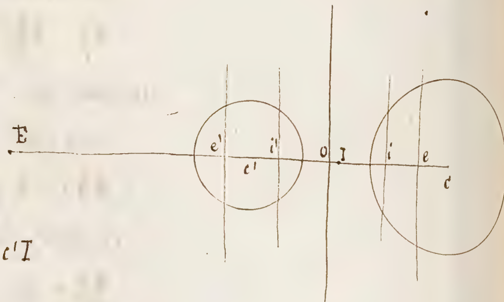
92. Chacun des deux C. de S. étant (9) un point à la fois semblablemt. situé par Rapport à ces deux cercles, et les polaires des points homologues étant évidemt. des droites homologues ; il s'ensuit que les Polaires de Similitude, soit internes, soit externes, de deux cercles, sont semblablemt. placées par Rapport à ces deux cercles : c. à d. sont des droi-tes dont les distances aux centres des 2 cercles sont

Respectivt. proportionnelles à leurs Rayons. — Au reste on pourrait le voir directemt.

93. Th. Dans tout Syst. de deux cercles, les Polaires de Sim. Int. sont égalemt. distantes des Pol. de S. Ext. de telle sorte qu'il existe une même perp. à la ligne des centres, égalemt. distante des unes et des autres.

Soient c, c' les centres.

on a



$$\begin{cases} ci : R :: R : cI \\ R : ce :: cE : R \end{cases} \qquad \begin{cases} c'i' : R' :: R' : c'I \\ R' : c'e' :: c'E : R' \end{cases}$$

d'où

$$ci : ce :: cE : cI \qquad c'i' : c'e' :: c'E : c'I$$

d'où

$$ei : EI :: ci : cE \qquad e'i' : EI :: c'i' : c'E$$

Mais on a aussi (1, 9)

$$ci : R :: R : cI$$

$$R' : c'I :: c'i' : R'$$

$$c'I : R' :: cI : R$$

$$R : cE :: R' : cE'$$

d'où, en multipl. et réduisant

$$ci : cE :: c'i' : c'E$$

La comparaison de cette proport. avec les deux précédentes donne

$$ei : EI :: e'i' : EI$$

Donc $ei = e'i'$. Donc $ei' = e'i$. Donc si o est le milieu de ii', ce sera aussi le milieu de cc'. Donc la perp. menée par o à cc' sera ....

94. Th. Cette perp. n'est autre chose que l'axe radical des deux cercles c et c'.

on a en effet d'après ce qui précède

$$R^2 = ce \cdot cE = ce\,(cc' + c'E)$$

$$R'^2 = c'e' \cdot c'E = c'e'\,(cE - cc')$$

d'où

$$R^2 - R'^2 = cc'(ce + c'e') + c'E \cdot ce - cE \cdot c'e'$$

Mais les points e, e' étant homologues dans les deux cercles, et E l'étant par rapport à tous deux, on aura

$$cE : c'E :: ce : c'e'$$

d'où

$$cE \cdot c'e' = ce \cdot c'E$$

donc

$$R^2 - R'^2 = cc'(ce + c'e')$$

Mais évidem^t.

$$ce + c'e' = Oc - Oc'$$

$$cc' = Oc + Oc'$$

donc

$$R^2 - R'^2 = \overline{Oc}^2 - \overline{Oc'}^2$$

c.q.f.d.

95. D'où la construction de l'A.R. si l'on connaît les Polaires de S. soit Ext. soit Int.

96. Th. L'axe Radical de deux cercles est placé, par Rapport à tout cercle qui les touche tous deux, de la même manière que le sont, par Rapport à ces deux cercles, leurs Polaires de S., savoir, leurs P. de S. Ext. si le 3e. cercle touche les deux autres de la même manière, et leurs P. de S. Int. s'il les touche différem^t. D'où il suit que l'A.R. de deux cercles est une Droite semblablem^t. placée par Rapport à tous les cercles qui les touche tous deux; pourvu que chaque cercle soit toujours touché de la même manière par tous ceux-là.

etc. etc. etc. c'est beaucoup trop long.

(Tome XI. des ann. de Gergonne).

Théorèmes d'analytique.

1°. Le lieu des milieux des cordes menées à une Section conique quelconque par un point de son plan est une autre Section conique, semblable à la première et semblablement Située, passant par le centre de celle-ci et par le point donné.

Soit pris le diam. passant par le point donné pour axe des x, et la parallèle au conj. mené par ce point pour axe des y. L'Eq. de la Courbe sera de cette forme :

$$y^2 = ax^2 + 2bx + c$$

Celle d'une droite qcq. passant par l'origine :

$$y = mx$$

Eliminant y

$$(a - m^2)x^2 + 2bx + c = 0$$

Eq. qui donne les abscisses des extrém. de la corde. — L'absciss.e du milieu sera

$$x = -\frac{b}{a - m^2}$$

ou

$$(a - m^2)x + b = 0$$

Eliminant m entre cette Eq. et $y = mx$ on a

$$y^2 = ax^2 + bx$$

pour l'Eq. de la courbe cherchée. Donc - - - cqfd.

2°. Le lieu des milieux des cordes menées à une Surface qcq. du 2e. ordre par un point, est une autre Surface du 2e. ordre semblable à la première et semblablem^t. Située, passant par le centre de celle-ci et par le point donné.

même démonstration.

Théorème d'analyse.

On a

$$\sin z = 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}$$

$$\sin\frac{z}{2} = 2\sin\frac{z}{4}\cos\frac{z}{4}$$

$$\sin\frac{z}{4} = 2\sin\frac{z}{8}\cos\frac{z}{8}$$

$$\vdots$$

$$\sin\frac{z}{2^{n-2}} = 2\sin\frac{z}{2^{n-1}}\cos\frac{z}{2^{n-1}}$$

$$\sin\frac{z}{2^{n-1}} = 2\sin\frac{z}{2^n}\cos\frac{z}{2^n}$$

d'où

$$\sin z = 2^n \sin\frac{z}{2^n}\cos\frac{z}{2}\cos\frac{z}{4}\cos\frac{z}{8}\cdots\cos\frac{z}{2^n}$$

Si n augmente, $\sin\frac{z}{2^n}$ tend vers $\frac{z}{2^n}$. Donc

$$\sin z = z\cos\frac{z}{2}\cos\frac{z}{4}\cos\frac{z}{8}\cos\frac{z}{16}\cdots$$

série touj. convergente.

Prenant les Logarithmes, et différentiant, on a

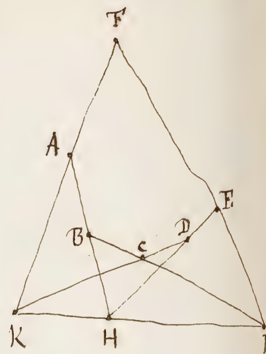
$$\frac{1}{z} = \cot. z + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{z}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{z}{8}$$

Si $z = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{16}\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} + \cdots$$

Sur l'Hyperbole Equilatère.

Th. I. Dans tout Triangle inscrit à une hyperbole Equilatère, le point de concours des 3 hauteurs est sur la courbe.

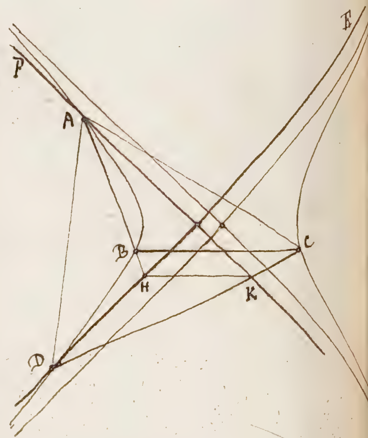


On sait que pour tout hexagone A..F inscrit à une conique, les points de concours K, H, I sont en ligne droite.

Si donc, la courbe ayant des branches infinies, on suppose que l'Hexagone ait deux de ses sommets, E, F, à l'infini, le point I, qui est sur FE, sera à l'infini : donc BC et HK seront parallèles.

Maintenant, la courbe étant une hyperbole, il est clair que DE et AF sont parallèles respectivt. aux deux asymptotes, et sont rectangulaires pour le cas présent (Hyp. Equilatère).

Les deux sommets E, F étant ainsi à l'infini, les 4 autres restent arbitraires. — Soient donc pris à volonté les 3 premiers A, B, C, et soit marqué le 4e. D de façon que les deux côtés AB, CD soient rectangulaires. alors AH est perp. sur DK. d'ailleurs AK est perp. sur DH par la propriété des asymptotes : donc le point A est le croisement des trois hauteurs du triangle DHK. donc AD est perp. sur HK, donc aussi sur BC. Mais par construction CD est perp. sur AB. donc D est le croisemt. des 3 hauteurs du triangle ABC. — or ABC est un triangle inscrit qcq. donc ...



cqfd.

Si l'un des angles A du triangle inscrit varie de grandeur en tendant vers $\frac{\pi}{2}$, le point D se déplacera sur la courbe, en s'approchant continuellemt. du sommet A : ce qui revient à dire que la sécante AD

perp. sur BC, tendra sans cesse à toucher la courbe en A ; donc à la limite :

Th. II. Dans tout triangle rectangle inscrit à une hyperbole équilatère, la perp. abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est tangente à la courbe.

Donc si l'angle droit oscille sur son sommet, l'hypoténuse se déplacera parallèlemt. à elle-même et à la normale menée à ce sommet.

applications aux constructions d'hyperboles équilatères.

voici d'autres énoncés. Les démonstrations seraient trop longues :

Th. III. Si deux points sont les milieux de deux cordes ou les poles de deux droites, et si par chacun d'eux on mène une parallèle à la droite correspondante à l'autre, le cercle qui passe par le ~~centre~~ de point de concours des parallèles et par les deux autres points passe au centre de la courbe.

Th. IV. Si 3 points sont tels que chacun est le pôle de la droite qui contient les deux autres, le cercle qui passe par ces trois points passe aussi par le centre de la courbe.

Th. V. Si l'on mène 4 tg. qcq. à une hyperbole équilatère, le centre de la courbe sera situé sur la circonf. qui passe par les 3 points d'intersection des diagonales du quadrilatère complet formé par ces tangtes.

ou, ce qui revient au même :

Les centres de toutes les Hyperboles équilatères tangentes à 4 droites qcq. sont situés sur la circ. d'un cercle qui passe par ...

D'ailleurs on sait (Th. de Newton) que, dans tout quadrilatère circ. à une section conique, le centre est sur

la droite qui joint les milieux des 3 diagonales.

Donc, dans le cas de l'hyperbole équilatère, le centre est à l'intersection ....

Th. VI. Dans tout quadrilatère inscrit à une Hyp. Eq. le cercle passant par les deux points de concours des côtés opposés et par le point d'intersection des diagonales passe aussi par le centre de la courbe.

Th. VII. Dans tout triangle inscrit, le cercle qui passe par les 3 milieux des côtés passe par le centre de la courbe.

ou : les centres de toutes les H. E. circ. à un triangle sont ...

Th. VIII. 4 points qcq. étant donnés, il y en a un autre, unique, tel qu'en le joignant aux milieux des 6 distances qui séparent les 4 premiers, l'angle de 2 droites de jonction qcq. est égal à celui des 2 distances correspondantes, ou en est le supplément. Ce point est le centre de l'Hyp. Eq. qui passe par les 4 points.

Si cependt. le 4e point était le point de concours des haut. du triangle formé par les 3 autres, le point en question ne serait plus unique : — on en conclut (?) le Th. suivt. (qu'on dém. direct.)

Th. IX. Le cercle qui passe par les pieds des perp. hauteurs d'un triangle passe aussi par les milieux des côtés, et par les milieux des distances qui séparent les sommets du point de concours des hauteurs.

Th. X. Les centres de toutes les Hyp. Eq. tangentes à deux droites et passant par deux points ~~et~~ sont tous sur une même circonférence.

Th. XI. Les centres de toutes les sect. coniques assujetties à passer par 4 points sont situés sur une autre section conique passant par les points où se

coupent les deux diagonales et les côtés opposés du quadrilatère correspondt. aux quatre points.

Th. XII. Les centres de toutes les Sections Coniques assujetties à toucher deux droites et à passer par deux points donnés sur un plan sont situés sur une autre Section conique passant par l'intersection des deux droites, par le milieu de la distance qui sépare les deux points, et par le milieu de la partie interceptée par ces droites sur la direction indéfinie de celle qui renferme les deux mêmes points.

(Ann. Gerg. T. XI.)

Théorème de Newton.

Problème. Déterminer le lieu des centres des Sections coniques qui touchent 4 droites données.

On prend deux de ces droites pour axes; les autres sont

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1$$

L'Eq. de la courbe sera

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2A'x+2B'y+C'=0$$

on exprimera qu'elle est tangente aux axes;

Puis, qu'elle l'est aussi aux autres droites, ce qui donnera, en simplifiant vu qu'elle touche les axes,

$$0=ab(C^2-AB)+2a(A'C-AB')+2b(B'C-BA')+2(CC'-A'B')$$

$$0=a'b'(C^2-AB)+2a'(A'C-AB')+2b'(B'C-BA')+2(CC'-A'B')$$

Mais les coordonnées du centre sont données par

$$Ax+Cy+A'=0 \qquad By+Cx+B'=0$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l}(C^2-AB)x+(B'C-A'B)=0\\(C^2-AB)y+(A'C-B'A)=0\end{array}\right\}$$

Tirant de là $A'C-AB'$, et $B'C-BA'$ et report^t. dans les Eq. précédentes:

$$\left\{\begin{array}{l}(C^2-AB)(2bx+2ay-ab)=2(CC'-A'B')\\(C^2-AB)(2b'x+2a'y-a'b')=2(CC'-A'B')\end{array}\right.$$

d'où

$$2bx+2ay-ab=2b'x+2a'y-a'b'$$

Eq. d'une droite, passant aux 2 points:

$$\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}a\\y=\frac{1}{2}b'\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}a'\\y=\frac{1}{2}b\end{array}\right.$$

Donc

Th. Le lieu géom. des centres des Sections coniques

inscrites à un quadrilatère est la droite qui joint les milieux des trois diagonales de ce quadrilatère.

C'est le renversement du théorème de Newton.

De là le moyen d'avoir le centre d'une sect. conique inscrite à un pentagone, en faisant successivement abstraction de chaque côté. — Il n'y a qu'un centre. On obtient cinq droites qui le contiennent. Alors un th. sur le pentagone.

Conséquences pour le triangle ; et pour un angle touché aux deux mêmes points par des coniques.

Voici maintenant une démonstrat. géom. du th.

Théorème de Newton. — La droite qui contient les milieux des diagonales d'un quadrilatère circonscrit à une conique, contient aussi le centre de la courbe.

Démontrons pour cela que ~~est~~ le lieu des centres des sect. con. inscrites à un quadrilatère ~~so~~ est la droite qui joint les milieux des trois diagonales.

Soit ABCD un quadrilatère ; P, Q les points de concours des côtés opposés. Soient I, K, L les milieux respectifs des trois diagonales : ces trois points sont sur une même droite, que je dis être le lieu des centres des sections coniques qui touchent les 4 côtés du quadrilatère.

Soient E et F les points où deux des diagonales rencontrent la troisième PQ.

etc. compliqué.

(Ann. de Gerg. T. XII).

Problème d'analyse.

Trouver la somme de la série

$$1 + \frac{a \operatorname{Cos} x}{1} + \frac{a^2 \operatorname{Cos} 2x}{2!} + \frac{a^3 \operatorname{Cos} 3x}{3!} + \dots$$

Solution. — Si, dans le terme général

$$\frac{a^n \operatorname{Cos} nx}{n!}$$

on met pour $\operatorname{Cos} nx$ sa valeur connue

$$\operatorname{Cos} nx = \frac{(\operatorname{Cos} x + \sqrt{-1}\operatorname{Sin} x)^n + (\operatorname{Cos} x - \sqrt{-1}\operatorname{Sin} x)^n}{2}$$

et si l'on pose

$$a(\operatorname{Cos} x + \sqrt{-1}\operatorname{Sin} x) = p \qquad a(\operatorname{Cos} x - \sqrt{-1}\operatorname{Sin} x) = q$$

le terme Général deviendra

$$\frac{1}{2}\,\frac{p^n + q^n}{n!}$$

Donc la série proposée est la somme de deux autres dont les termes généraux sont

$$\frac{1}{2}\,\frac{p^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\,\frac{q^n}{n}$$

et dont les sommes sont

$$\frac{1}{2}\,e^p \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\,e^q$$

donc

$$2S = e^p + e^q$$

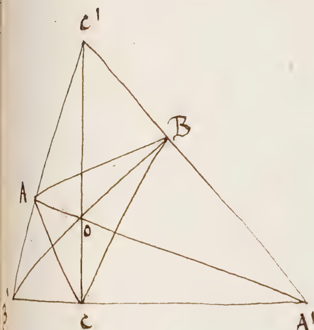
ce qui se réduit aisément à

$$S = e^{a \operatorname{Cos} x} \operatorname{Cos}.(a \operatorname{Sin} x).$$

(Voir bien d'autres développemts. T. XIII des ann. de G.)

Théorème de Géométrie.

Th. La circonf. qui passe par les centres de trois qcq. des 4 cercles qui touchent à la fois les trois côtés d'un triangle qcq. est double de celle qui passe par les trois sommets de ce triangle.



Soient A, B, C les trois sommets du triangle dont il s'agit. — Soient O, A', B', C' les centres des 4 cercles inscrit et ex-inscrits. — Il est évident que C', A, B' par ex. sont en ligne droite : — et que O est le point de concours des hauteurs du triangle A'B'C'.

Remarquons maintenant que lorsque deux triangles ont un côté égal, et que l'angle opposé dans l'un est supplé-ment de l'angle opposé dans l'autre, ces deux trian-gles sont nécessairemt. inscriptibles à un même cercle ou à des cercles égaux : puisque, en les opposant base à base, on formera un quadrilatère inscriptible.

Or l'angle COB, ou C'OB' ~~est~~ ~~est~~ supplémt. de A'.

Donc C'OB' et C'A'B' sont inscriptibles dans des cercles égaux. Donc les circonférences qui passent par les centres de trois quelconques des 4 cercles inscrit et ex-inscrits à un triangle, sont toutes égales entre elles, — et ont donc même rayon. Reste à prouver que le rayon de celle qui passe par A', B', C' par ex. est double du rayon de celle qui est circ. au triangle ABC.

Or on a $S = \frac{abc}{4R}$, $R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{2bc\sin A} = \frac{a}{2\sin A}$.

c.à.d. que le rayon du cercle circ. à un triangle est égal à un de ses côtés divisé par le sinus de l'angle opposé : ce

qu'on peut du reste démontrer directement.

cela posé on a

$$AB = 2R \sin C \qquad A'B' = 2R' \sin C'$$

Mais si l'on circ. au triangle A'AB' un cercle, dont le rayon sera $\frac{1}{2}A'B'$, ce cercle sera aussi circ. au triangle AB'B : de sorte que son rayon sera aussi $\frac{AB}{2\sin AB'B}$; donc

$$AB = A'B' \sin AB'B .$$

Remplaçant ici AB et A'B' par leurs valeurs, on a

$$R' \sin C' . \sin AB'B = R \sin C$$

or l'angle $AB'B = \frac{1}{2}C$ évidemt. donc

$$R' \sin C' . \sin \tfrac{1}{2}C = R \sin C = 2R \sin\tfrac{1}{2}C \cos\tfrac{1}{2}C$$

ou

$$R' \sin C' = 2R \cos\tfrac{1}{2}C$$

Maintent. on a encore

$$BC'C = \tfrac{1}{2}B \qquad AC'C = \tfrac{1}{2}A$$

d'où en ajout.

$$C' = \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\sin C' = \cos\tfrac{1}{2}C$$

Donc

$$R' = 2R$$

Donc enfin .. cqfd.

Théorèmes sur l'Ellipse.

Th. Dans tout Parallélogr. circonscrit à une Ellipse, les Diagonales se coupent au centre et sont deux Diam. Conj.

Le lieu des sommets des parallél. conj. circ. est une ellipse homothétique.

Si deux ellipses sont homothétiques, toute corde de la plus grande Tg. à la < la touchera en son milieu.

Tout cela se démontre par les projections avec la plus grande facilité.

Quelques Extraits
du
Journal de Crelle.

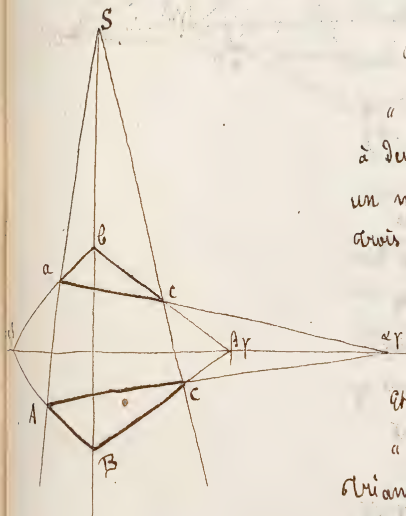
—

Quelques Théorèmes de Géométrie.

(Steiner. – J. de Crelle, 1er. Volume, p. 38, en allemand.)

1.

On connaît le Théorème suivant :



« Lorsque les trois droites Aa, Bb, Cc, qui joignent deux à deux les sommets de deux triangles ABC et abc situés dans un même plan, se coupent en un même point S, les trois points αβ, βγ, αγ où les côtés correspondants AB et ab, BC et bc, AC et ac se rencontrent deux à deux, – se trouvent sur une même ligne droite. »

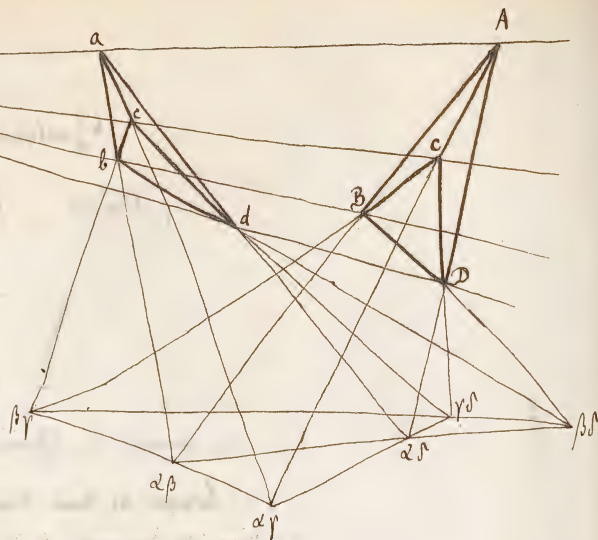
Et Réciproquement :

« Lorsque les points αβ, βγ, αγ où les côtés de deux triangles ABC et abc situés dans un même plan, se coupent deux à deux, se trouvent en ligne droite :– les trois droites Aa, Bb, Cc, qui joignent deux à deux les sommets de même nom des deux triangles, se coupent en un même point S. »

2.

Il existe pour le cas de l'Espace un Théorème analogue, d'où l'on peut tirer plusieurs conséquences intéressantes. – Le voici :

« Si les quatre droites Aa, Bb, Cc, Dd qui joignent deux à deux les sommets de deux tétraèdres quelconques ABCD et abcd, se coupent en un même point S : – alors, les



les quatre lignes suivant lesquelles les faces correspon-dantes des tétraèdres se coupent deux à deux ; – ou bien les six points αβ... γδ où leurs arêtes correspondantes se rencontrent, sont dans un seul et même plan. »

Et inversement :

« Si les quatre droites suivant lesquelles les faces de deux tétraèdres qcq. se coupent deux à deux, se trouvent dans un même plan (E) ; – alors les quatre droites Aa, Bb, Cc, Dd qui joignent deux à deux les sommets correspondants du tétraèdres (càd. les sommets op-posés aux faces que l'on a associées), se rencontrent en un même point S. »

En effet, pour le premier cas de ce théorème : il ré-sulte de l'hypothèse que les sommets des deux tétraèdres se trouvent deux à deux en ligne droite avec le point S, et par conséquent, que deux arêtes correspondantes de ces tétraèdres sont dans un même plan avec le point S. ainsi par ex. les deux arêtes AB, ab sont évi-demment dans le plan ASB. Par suite, deux pareilles arêtes se coupent en un point αβ, et par conséquent les arêtes correspondantes des deux tétraèdres se coupent en six points αβ, αγ, αδ, βγ, βδ, γδ. – Sur chaque sys-tème de deux faces correspondantes (p. ex. ABC, abc) se trouvent trois couples d'arêtes correspondantes (AB et ab,

BC et bc, CA et ca) : donc les 3 points de rencontre ($\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$) de ces trois couples d'arêtes se trouvent nécessairement sur l'intersection des deux faces, et par suite, sur une même ligne droite. — Mais les quatre couples de faces correspondantes donnent le même résultat : — donc les six points de rencontre des six couples d'arêtes correspondantes sont tels qu'il existe quatre droites différentes dont chacune contient trois d'entre eux. Donc ces six points sont dans un seul et même plan (E).

La démonstration de la seconde partie du théorème se déduit de là d'elle-même. — De plus il est facile de voir que la démonstration du Théorème Nr. 1 est une conséquence immédiate de la précédente, si l'on suppose que les deux faces ABC et abc des deux tétraèdres soient dans un même plan.

3.

Le plan (E) sur lequel se trouvent les six points de rencontre des six couples d'arêtes correspondantes, où les quatre droites résultant des intersections des faces correspondantes des deux tétraèdres, — ce plan est parfaitement déterminé par l'intersection ($\beta\gamma\delta$) des deux faces BCD, bcd, et par le point de rencontre ($\alpha\beta$) des deux arêtes AB et ab : — Les mêmes propriétés se maintiendront donc encore si les sommets D, C, d, c, sans sortir du plan des plans BCD, bcd, et sans cesser d'être en ligne droite avec le point S, se meuvent du reste d'une manière quelconque. — Il suit de là que :

« Soient deux plans quelconques BCD, bcd, et trois points à volonté S, a, A mais situés en ligne droite : Par l'un des trois points, par ex. par le point S, on mène à volonté une ligne SdD qui rencontre les deux plans aux points d et D : — et l'on joint ces deux points d et D aux deux autres points donnés a et A par les droites da, DA : le lieu des points de rencontre ($\alpha\delta$) de ces deux droites est un plan déterminé (E) qui passe par la droite d'intersection ($\beta\gamma\delta$) des deux plans donnés. »

Et inversement :

« Soient donnés trois plans quelconques BCD, bcd et (E) qui se coupent suivant une droite ($\beta\gamma\delta$), et deux points à volonté A et a : — Par un point qcq. ($\alpha\delta$) d'un des plans, (E) par ex. on mène par les deux points donnés deux droites qui rencontrent les deux autres plans en deux points D et d : ces deux points D et d sont toujours en ligne droite avec un 3e. point fixe S, lequel est aussi en ligne droite avec les deux points donnés A et a. » — ou encore : « on prend sur le plan (E) une droite à volonté ($\alpha\gamma\delta'$) ; on mène par cette droite et par les deux points donnés (A, a) deux plans qui coupent les deux autres plans donnés BCD, bcd respectivement suivant les droites DC, dc : ces deux intersections sont toujours sur un plan, et ce plan passe toujours par un point fixe S qui est situé en ligne droite avec les deux points donnés A et a. »

4.

Il suit encore delà que le théorème précédent (2) est plus général qu'on ne l'avait annoncé, c.a.d. qu'il n'a pas lieu simplement pour deux tétraèdres, mais encore

pour deux Pyramides d'un nombre de sommets quelconque : — ce qui donne le théorème suivant :

« Si les droites qui joignent deux à deux les sommets de deux Pyramides quelconques de n côtés chacune, passent toutes par un même point S : les droites d'intersection des faces correspondantes des deux pyramides, aussi bien que les points de rencontre des arêtes correspondantes (points de rencontre qui sont sur les droites d'intersection) se trouvent tous dans un seul et même plan. »

Et inversement :

« Si les droites suivant lesquelles se coupent, quand on les prend deux à deux, les faces de deux Pyramides de n côtés, — ou si les points suivant lesquels se rencontrent les arêtes, prises deux à deux, de ces pyramides, sont sur un seul et même plan : — les droites qui joignent deux à deux les sommets correspondants des deux pyramides passent toutes par un seul et même point S. »

5.

Les théorèmes précédents peuvent encore s'énoncer sous une autre forme, ainsi qu'il suit :

« Soient A, a les sommets de deux cônes donnés quelconques, du $m^{ième}$ degré, dont les bases sont sur les plans BCD, bcd, les contours de ces bases se trouvant sur la surface d'un cône dont le sommet S est en ligne droite avec les sommets A et a des deux cônes donnés : — ces deux cônes donnés (prolongés au-delà de leurs bases si cela est nécessaire) se couperont suivant une courbe plane, dont le plan (E) passera par l'intersection $\beta\gamma\delta$ des plans des bases des deux cônes. »

Ou bien encore, ce qui est la même chose :

« Si les sommets S, a, A de trois cônes du $n^{ième}$ degré sont sur une même ligne droite SaA, et que deux quelconques de ces cônes coupent le troisième suivant des courbes planes, les deux premiers se coupent également suivt. une courbe plane, et les plans de ces 3 courbes d'intersection passent par une même ligne droite. »

Et inversement :

« Si les surfaces de deux cônes donnés qcq. du $n^{ième}$ degré se coupent suivant une courbe plane dont le plan passe par l'intersection des plans des deux bases des cônes donnés : – ces deux bases sont sur un même cône dont le sommet est en ligne droite avec ceux des deux cônes donnés. »

ou, ce qui revient au même :

« Si deux cônes donnés qcq. (A, a) se coupent suivant une courbe plane, et qu'on prenne sur le plan (E) de cette courbe une droite arbitraire (βγδ); qu'on mène à volonté par cette ligne deux plans, qui coupent respectivement les 2 cônes donnés suivant deux courbes planes, ces deux dernières courbes sont toujours sur un même cône, dont le sommet (S) est sur la droite (Aa) qui passe par les sommets des deux cônes donnés. »

6.

Un cylindre pouvant être considéré comme un cône dont le sommet est à l'infini, les théorèmes précédents ont lieu semblablement pour les cylindres, et, dans ce cas particulier, s'énoncent comme il suit :

« Si les génératrices de trois cylindres donnés du $n^{ième}$ degré sont parallèles à un même plan, et que deux quelconques d'entre eux coupent le 3e. suivant des courbes planes; ces 2 cylindres se coupent eux-mêmes suivant une courbe plane, et les plans des 3 intersections passent par une même droite. »

Et Inversement :

« Si deux cylindres qcq. du $n^{ième}$ degré se coupent suivant une courbe plane ; si, sur le plan (E) de cette courbe on prend une droite qcq ($\delta\gamma\delta$), par laquelle on fera passer un pt deux plans qcq. qui couperont respect^t. les deux cylindres donnés suivant deux courbes planes : ces deux dernières courbes sont sur un même cylindre dont les génératrices sont parallèles au plan parallèle déjà aux génératrices des deux premiers cylindres. »

7.

Un autre cas particulier est celui où les deux cônes considérés précédemment sont tous deux seulement du second degré. Dans ce cas, on obtient le théorème suivant :

I « Si deux cônes du second degré sont tous deux tangents aux deux faces d'un angle dièdre, ces deux cônes se coupent suivant deux courbes planes (du 2^d. degré). »

Soient en effet A et a deux cônes ; E et e deux plans dont chacun est tangent aux deux cônes ; par ex. le plan E est tangent à chacun des cônes A, a tout le long d'une génératrice : et, au point P, où ces deux génératrices se rencontrent, il est tangent en même temps aux deux cônes ; de même le second plan e touche simultanément les deux cônes en un certain point p. Qu'on imagine encore un plan E, passant par les deux points P, p, et par un point q pris arbitrairem^t. sur l'intersection des deux cônes. Ce plan E, coupera les deux surfaces coniques suivant A, a suivant deux courbes du second degré C, c, et les deux plans E, e suivant deux droites L, l ; et nécessairement la ligne droite L, au point P, est tangente en même temps aux deux courbes C et c, de même que la droite l leur

est aussi tangente à toutes deux au point p: — et les deux courbes C et c passent nécessairement par le point q. Mais, on le sait, il est impossible que deux courbes du second degré C, c se touchent en deux points P, p, et se coupent de plus en un point q: — donc les deux courbes C et c n'en font qu'une seule, qui est l'intersection des deux surfaces coniques A et a.

On verra avec un peu d'attention que si l'intersection des deux cônes se compose de deux parties, chacune d'elle se est une courbe plane, et les deux cônes A et a, placés dans les mêmes conditions que tout-à-l'heure, se coupent suivant deux courbes planes du second degré.

Du théorème précédent, on déduit immédiatement le suivant :

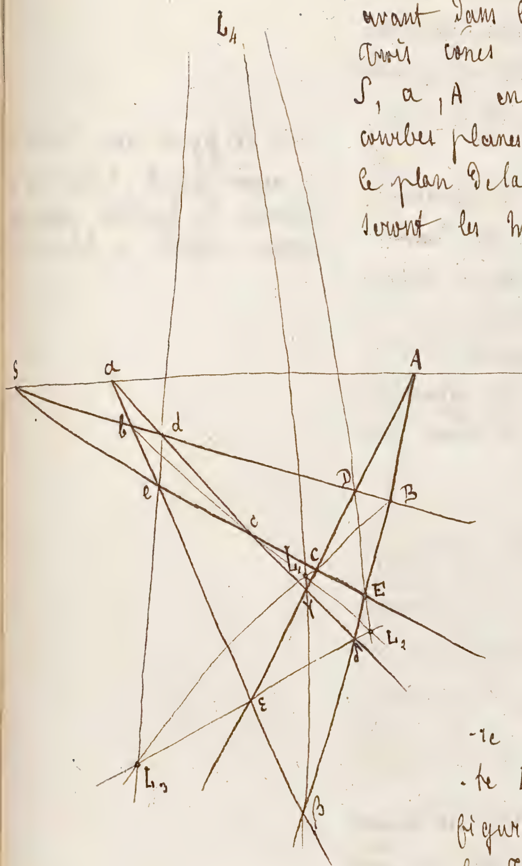
II. « Si deux cônes quelconques du second degré se coupent suivant une courbe plane C, ils se couperont encore, en général, suivant une autre courbe plane c. »

Car : si deux cônes du second degré se coupent suivant une courbe plane C, on pourra en général par la droite qui joint les sommets des deux cônes mener deux plans dont chacun sera tangent à la courbe d'intersection C et par suite aussi aux deux cônes : d'où suit notre théorème, en vertu du précédent. — Mais si la droite qui joint les sommets des deux cônes vient à percer l'espace limité par la courbe C, de façon qu'aucun plan ne puît toucher simultanément les deux cônes, alors le théorème précédent peut se démontrer en général avec le secours des proportions harmoniques : — c'est ce dont on parlera en un autre endroit, à l'occasion de considérations analogues.

Il suit de ce qui précède que si les 3 cônes

dont on a parlé dans les Théorèmes du N°. 5 sont du second degré : ils se couperont deux à deux, dans les conditions précédemment énoncées, suivant six courbes planes.

afin que l'imagination trouve un secours pour aller plus avant dans les conséquences de ces théorèmes : considérons trois cones du second degré ayant leurs sommets S, a, A en ligne droite, et se coupant suivant six courbes planes : supposons les 3 sommets situés dans le plan de la figure : les 3 angles BSE, βaδ, βAε seront les intersections de ce plan avec les trois cônes.



Les plans des deux courbes suivant lesquelles se coupent les deux cônes S et a, passent respectivement par les droites bc et de ; de même les plans des deux courbes suivant lesquelles se coupent les deux cônes $\left\{\begin{matrix} S \text{ et } A \\ a \text{ et } A \end{matrix}\right\}$ passent respectivement par les droites $\left\{\begin{matrix} BC \text{ et } DE \\ \beta\gamma \text{ et } \delta\varepsilon \end{matrix}\right\}$.

Cela posé, il résulte du théorème N°. 5 que les 3 plans bc, BC et βγ (c.a.d. les plans désignés plus haut, qui passent respectivement par les droites de la figure bc, BC et βγ) se coupent suivant une droite L_1 (c.a.d. une droite qui perce le plan de la figure au point L_1) ; d'après le même théorème les trois plans bc, DE et εδ se coupent aussi suivant une droite L_2, et de même les 3 plans de, BC et δε suivant une droite L_3, et enfin les 3 plans ed, ED et βγ suivant une droite L_4.

Remarquons de plus que si par ex. les deux droites L_1 L_2 qui sont dans le même plan bc se coupent en un point P, alors nécessairement les 5 plans bc, BC, DE, βγ, δε passeront par le même point P,



et que par suite le sixième plan de, aussi bien que les deux autres droites L_3, L_4, passeront nécessairement par le même point P : — Il suit de là que les six plans bc, de, BC, DE, βγ, δε, aussi bien que les 4 droites L_1 L_2 L_3 L_4, en général, passent toujours par un même point P, et que, dans le cas particulier où ce point P s'éloigne indéfiniment, ils sont tous parallèles à une même ligne droite.

En réunissant ce qui précède, on arrive à ce théorème:(x)

III. « Si les sommets S, a, A de trois cônes donnés du second degré, BSE, βaδ, βAε, qui se coupent suivant des courbes planes, sont situés sur une même droite SaA : les six plans de ces courbes d'intersection se coupent 3 à 3 suivant 4 droites (L_1, L_2, L_3, L_4), et ces six plans, ainsi que ces 4 droites, se réunissent en un seul et même point P (ou sont parallèles à une même droite). »

(x) La figure plane tracée sur le papier conduit évidemt. à un théorème de géométrie plane assez curieux et facile à énoncer.

8.

Les théorèmes du No. 7 sur les cônes du 2d. degré ne sont que des cas particuliers des théorèmes plus généraux qui vont suivre, sur les surfaces du second degré, et que nous ne ferons qu'énoncer, sauf à les démontrer ailleurs par des considérations géométriques aussi simples que les précédentes :

I. « Si deux surfaces qcq. du second degré se coupent suivant une courbe plane : elles se couperont encore en général suivant une seconde courbe plane. » (Th. II, No. 7)

II. « Toutes les droites partant d'un point S qui touchent une surface donnée du 2d. degré forment un cône du second degré dont la courbe de contact avec la surface donnée est plane et du 2d. degré. »

Ou en d'autres termes :

« — C'est le même énoncé absolument. — l'auteur a l'allemand pour allonger. — »

III. « Si deux surfaces du second degré se touchent en plus de deux points, elles se touchent tout le long d'une courbe plane du 2^{d}. degré. »

IV. « Si deux surfaces du 2^{d}. degré touchent une 3e. surface du 2^{d}. degré suivant des courbes planes, elles se coupent elles-mêmes suivant une courbe plane. »

Le système de deux plans pouvant être considéré comme une surface du 2^{d}. degré ; le premier théor. du N°. 7 n'est qu'un cas particulier du précédent. — Un autre cas particulier est le suivant :

« Si deux cylindres du second degré sont en même temps intérieurs ou extérieurs au système de deux plans parallèles (c'est le cas de cylindres elliptiques ou hyperboliques) et sont tangents à ces deux plans, ils se coupent l'un l'autre suivant deux courbes planes du 2^{d}. degré. »

V. « Deux courbes planes qcq. tracées sur une même surface du 2^{d}. degré, déterminent ensemble deux cônes du 2^{d}. degré : c.à.d. qu'on peut trouver deux cônes du 2^{d}. degré sur lesquelles elles soient toutes les deux. » — En d'autres termes : « Si un plan se meut en touchant toujours deux courbes planes tracées sur une même surface du 2^{d}. degré, l'enveloppe des positions du plan est un cône du 2^{d}. degré. » Et comme ce plan peut avoir deux positions différentes par rapport aux deux courbes, celles-ci sont donc en même temps sur deux cônes déterminés.

En particulier, il suit de là que

« Si l'on fait deux sections planes qcq. dans un cône du 2^{d}. degré, ces deux sections sont sur une même surface du 2^{d}. degré. »

On peut encore, du théorème précédent, déduire le suivant :

« Si par un point P pris à volonté sur une surface du 2^{d}. degré on lui mène un plan tangent (E), et que par le même point P on mène des cônes ayant pour bases des courbes planes qcq. tracées sur la surfa-

-ce ; tous ces cônes (ainsi que la surface donnée) seront coupés suivant des courbes semblables par des plans qcq. parallèles au plan tangent (E). »

ou en d'autres termes :

« Si d'un point P pris à volonté sur une surf. du 2d. degré on projette toutes les courbes planes tracées sur la surface sur un plan parallèle au plan tangt. à la surf. en P : toutes ces projections sont semblables. »

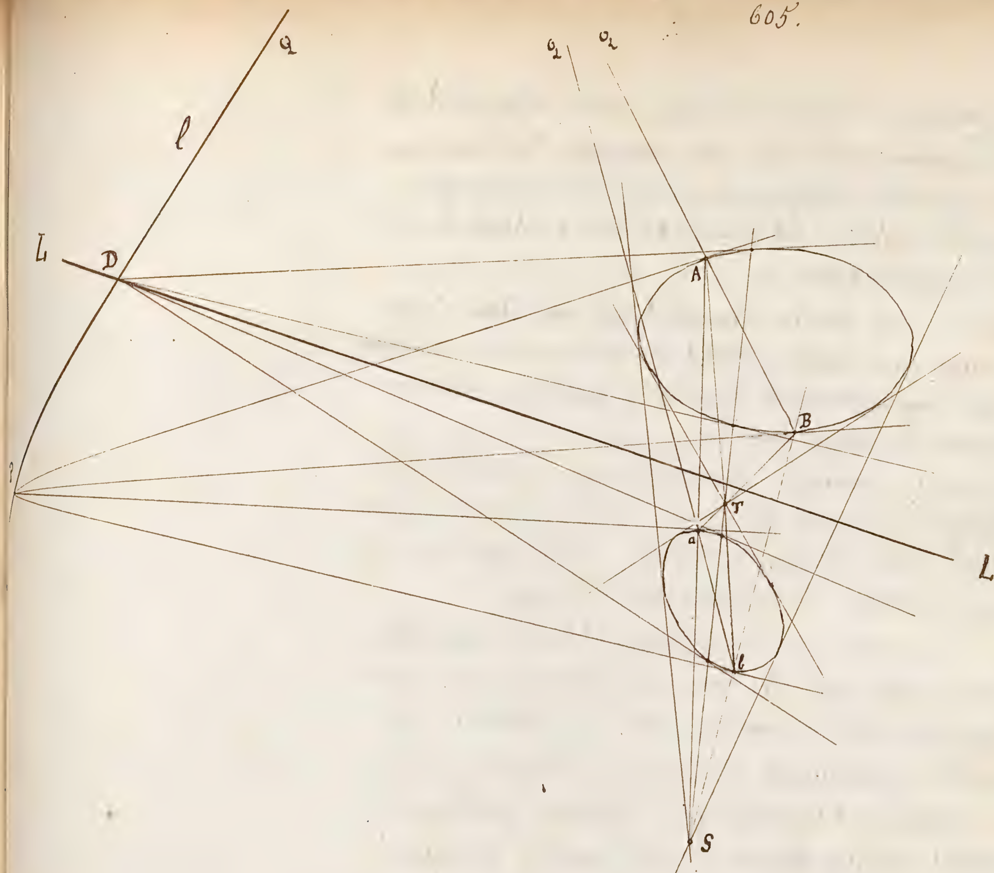
VI. « Si 3 surf. du 2d. degré se coupent 2 à 2 suivt. des courbes planes : les 6 plans d'intersection (il y en aura 6 puisque 2 surf. qcq. se couperont suivt. 2 courbes planes) se couperont 3 à 3 suivant 4 droites, et tous les 6, ainsi que ces 4 droites, passeront par un même point P. »

La démonstration de ce théorème résulte de (V et N°. 7, III).

Du théorème précédent on peut facilement tirer le suivant :

VII. « Si l'on prend deux courbes quelconques du 2d. degré sur un plan, et que par chacune d'elles on mène une surface qcq. du 2d. degré, de façon pourtant que ces deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes : les plans de ces deux intersections couperont le plan donné suivant deux droites fixes L, l. »

Ces deux droites L et l ont, par rapport aux deux courbes données, une des propriétés remarquables de deux sections coniques qcq. situées dans un même plan (trad. littéralemt : obscur). — Prenez en effet sur une des droites L, l, un point qcq. P : mener de ce point deux tangentes à chaque courbe : elles toucheront ces courbes aux quatre points A, B, a, b, que l'on joindra deux à deux par six droites, lesquelles se rencontreront en 3 nouveaux points : Aa et Bb en S, Ab et Ba en T, AB et ab en Q : les points S et T sont fixes quand le point P se meut sur la droite l : et le lieu des points Q



est la droite même l sur laquelle se meut le point P.

Si P est à l'intersection D de L et l, les 2 points de contact des tangentes issues du point D sont sur une même droite passant par les points S et T : cette propriété appartient exclusivemt. au point D.

De plus, les 4 tangentes communes aux deux courbes se coupent deux à deux aux points S et T. Donc, en partant de là, les lignes L et l donneront la solution géométrique encore inconnue à ma connaissance du problème suivant :

« Mener une tangente commune à deux sections coniques situées dans le même plan. »

Enfin il faut remarquer que, dans le cas où les courbes données se couperaient en 4 points A, B, C, D,

il se présentera 3 systèmes de deux droites conjuguées L et l. car deux quelconques des six cordes communes des deux courbes qui passeront à la fois par les 4 points de rencontre A, B, C, D (à savoir AB et CD, AC et BD, AD et BC) forment un pareil système L, l.

VIII. « Le lieu des sommets d'un cône droit du second degré qui touche suivant des courbes planes une surface du second degré donnée de grandeur et de position, est une courbe plane du second degré. »

Si par ex. la surface donnée est une Ellipsoïde : le lieu des sommets de ce cône droit qui touche la surface suivant une courbe plane, est une Hyperbole. Cette hyperbole a des relations de position remarquables avec l'Ellipsoïde.

a. L'hyperbole est dans le plan (AC) du plus petit (C) et du plus grand (A) axes de l'Ellipsoïde : son grand axe coïncide avec le grand axe (A) de l'Ellipsoïde, et son centre est précisément le centre de l'Ellipsoïde.

b. Les axes de l'Hyperbole sont égaux en grandeur aux excentricités des deux ellipses suivant lesquelles les plans des axes (AB) et (BC) coupent l'Ellipsoïde. Si donc a, b, c sont les demi-axes de l'Ellipsoïde, l'Eq. de l'Hyperbole est

$$(a^2-b^2)z^2-(b^2-c^2)x^2=-(a^2-b^2)(b^2-c^2)$$

où les coordonnées x, z sont respectivement parallèles aux axes A et C de l'Ellipsoïde.

c. L'Hyperbole coupe la surface Ellipsoïdale en ces 4 points où cette surface a pour plans tangents 4 plans parallèles à ceux des sections circulaires de l'Ellipsoïde. Ces 4 points sont précisément les ombilics de la surface.

Il n'y a donc que deux cylindres droits du second degré qui puissent toucher un Ellipsoïde donné suivant des courbes planes : les axes de ces deux cylindres sont

les asymptotes de l'hyperbole ci-dessus.

IX. Un cercle tracé sur la surface d'une sphère, et le centre de cette sphère déterminent évidemt. un cône droit. Et inversement tout cône droit dont le sommet est au centre d'une sphère coupe sa surface suivant deux cercles. — Ce théorème n'a pas lieu seulement pour la sphère ; voici son énoncé plus général :

« Si une courbe du second degré tourne autour de son grand axe (celui qui contient les foyers), elle décrit une surface du 2d. degré qui a mêmes foyers que la courbe mobile, et toute courbe plane tracée sur cette surface détermine, avec chacun des foyers, un cône droit. Inversemt : tout cône droit dont le sommet est à l'un des foyers coupe la surface suivant deux courbes planes. »

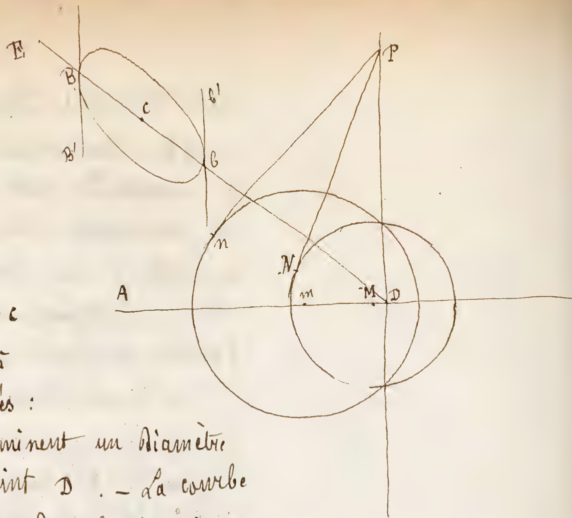
Si la courbe génératrice est une parabole, un des foyers s'en va à l'infini. alors toute courbe plane prise sur la surface se trouve sur un cylindre droit dont l'axe est parallèle à l'axe de révolution : et inversemt : un pareil cylindre coupe toujours la surface suivant une courbe plane.

X. « Si l'on a deux plans donnés de position, et sur l'un d'eux une courbe du second degré donnée de grandeur et de position : le lieu des sommets K des cônes du 2d. degré qui passent par cette courbe et sont coupés suivant des cercles par l'autre plan, est une courbe plane du 2d. degré. »

Par ex. la courbe donnée est-elle une ellipse ? le lieu des sommets K du cône est une hyperbole : et inversement si la courbe est une hyperbole, le lieu est une ellipse ; et enfin si cette courbe est une parabole, il en est de même du lieu des points K.

De plus :

« Les centres m, M … des cercles suivant lesquels le cône K coupe le 2d plan, sont tous sur une même droite AD



perpendiculaire à l'intersection PD des deux plans donnés (ADP, EDP) : et cette intersection PD est l'axe radical de deux quelconques des cercles m, M : c.à.d. que Pn = PN = . . . »

« Si l'on mène à la courbe donnée c deux tangentes BB' ; bb'. parallèles à l'intersection DP des deux plans donnés : les deux points de contact B et b déterminent un diamètre Bb qui rencontre la droite AD au point D. — La courbe lieu des sommets des cônes K est toujours dans le plan ADE, et a le diamètre Bb commun avec la courbe donnée C. »

XI. — « Si l'on a deux plans donnés de position, et dans l'un une courbe du 2^d. degré (C) donnée de grandeur et de position : le lieu des sommets (K) des cônes qui passent par cette courbe et coupent l'autre plan suivant des hyperboles équilatères, est une surface (F) du second degré. »

ainsi :

a. Si la courbe C est une ellipse, la surface F est un ellipsoïde, ayant même centre que l'ellipse.

b. Si C est une hyperbole, F est un hyperboloïde, et même :

α. Si l'intersection PD des deux plans ne coupe pas les deux branches de l'hyperbole donnée (mais seulem^t. une ou aucune), F est un hyperboloïde à deux nappes.

β. Si PD. coupe les deux branches de l'hyperbole, F est un hyperboloïde à une nappe.

c. Si C est une parabole, F est un paraboloïde elliptique.

d. Si C est le système de deux droites qui se coupent, F est un cône du 2^d degré.

e. Si C est le système de deux droites parallèles, F est un

cylindre elliptique.

Dans les deux derniers cas, au lieu de l'hyperbole équilatère demandée, on obtient deux droites rectangulaires dont le système peut être considéré comme représentant une hyperbole équilatère.

Les surfaces du 2d. degré sont celles dans lesquelles un plan peut déterminer des sections circulaires : et dans chacun des cas précédents la surface F est coupée suivant un cercle par un plan parallèle au 2d. plan donné (ADP).

Il est bon de remarquer que toute surface du 2d. degré ne peut pas être coupée par un plan suivant un cercle, ou autrement, ne peut pas être engendrée par les déplacements d'un cercle variable. outre les cylindres hyperbolique et parabolique et le système de deux plans, il faut ranger dans ce cas le paraboloïde hyperbolique : Biot (Essai de géom. analyt. p. 271) ne fait pas d'exception pour cette surface ; et Monge (applic. de l'an. à la géom. p. 45) dit expressément qu'elle peut être engendrée par un cercle variable. — Nous prétendons le contraire, et le prouvons en peu de mots ainsi qu'il suit.

L'équation de la surface est, en coordonnées rectangulaires

$$Pz^2 - py^2 = -pPx \qquad (A)$$

Coupons la surface (A) par un plan qcq. dont l'Eq. sera

$$x = ay + bz + c \qquad (B)$$

La projection de l'intersection sur le plan des yz sera

$$Pz^2 - py^2 = -pP(ay + bz + c) \qquad (C)$$

équation [illegible] d'une hyperbole, puisque z^2 et y^2 ont des signes différents, donc l'intersection est elle-même une hyperbole. Il est clair que la courbe (C), et par suite aussi l'intersection est toujours une hyperbole si dans l'Eq. (B) du plan sécant, ~~ni x ni~~ y, ou z, ~~ne sont~~ ou y et z ne sont

constamment nuls, c.à.d. si ce plan sécant est parallèle ~~ni~~ aux y, ou aux z, ou aux y et aux z. — Si ce plan était parallèle aux x, de manière que son éq. fût

$$ay + bz + c = 0 \qquad (D)$$

alors la proj. de l'intersect. sur le plan des xz serait

$$Pz^2 - p\left(-\frac{bz+c}{a}\right)^2 = -pPx \qquad (E)$$

Equation d'une Parabole : par suite l'intersection est elle-même une Parabole.

Donc la Surface (A) sera coupée ~~est~~ par un plan en Géné-ral suivant une Hyperbole (ce qui comprend le cas de deux droites), et suivant une parabole seulement dans le cas particulier où le plan sécant est parallèle à l'axe des x.

9.

Dans le 14e. volume des annales de Gergonne (p. 280, 296) Querret et Sturm démontrent le Théorème suivant :

« Si d'un point qcq. de la circonférence d'un cercle concentrique au cercle circonscrit à un Triangle donné, on abaisse des ~~verticales~~ perpendiculaires sur les côtés du Triangle : la Surface du Triangle qui a pour sommets les pieds de ces perpendiculaires, est constante. »

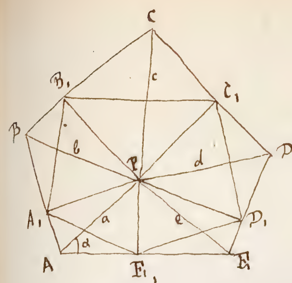
Dans le 15e. volume, p. 45 un abonné et p. 250 Sturm démontrent le Théorème suivant :

« Si d'un point qcq. de la circ. d'un cercle ayant même cen-tre qu'un polygone Régulier, on abaisse des perp. sur les côtés du polygone, les pieds de ces perp. seront les sommets d'un nouveau polygone de Surface constante. »

L'Huilier a donné ce Théorème dans la Bibliothèque Uni-verselle (Mars 1824 p. 169).

Les deux Théorèmes ne sont qu'un cas particulier du suivant beaucoup plus Général :

« Si d'un point P pris arbitrairement sur le plan d'un



polygone reg. ABCDE on abaisse sur les côtés les perpendiculaires PA_1, PB_1, … : si l'on joint successivement par des droites les pieds de ces perp. de manière à former un nouveau polygone $A_1B_1C_1D_1E_1$ inscrit au premier : — Si la surface de ce polygone doit rester constante, le lieu des points P est une circonférence de cercle. Le centre de ce cercle est indépendant de la surface du polygone inscrit et de la position primitive du point P. Si l'on applique aux sommets du polygone donné des forces parallèles qui soient entre elles comme les sinus des doubles des angles du polygone, le centre de gravité de ces forces coïncide avec le centre du cercle lieu des points P. »

Démonstration.

Joignons le point P aux sommets du polygone donné par les droites a b c d e. alors on aura par ex.

$$(1)\quad \begin{cases} PA_1 = a \sin(A-\alpha) \quad \text{et} \quad PE_1 = a \sin\alpha \\ AA_1 = a \cos(A-\alpha) \quad \text{et} \quad AE_1 = a \cos\alpha \end{cases}$$

Soit Δ la surf. du triangle PA_1E_1 et $\square$ celle du quadrilatère PA_1AE_1. on aura évidemt.

$$2\Delta = PA_1 \cdot PE_1 \sin A$$
$$= a^2 \sin\alpha \sin A \sin(A-\alpha)$$

et

$$2\square = (AA_1 AE_1 + PA_1 PE_1)\sin A$$
$$= a^2 \sin\alpha \sin A \sin(A-\alpha) + a^2 \sin A \cos\alpha \cos(A-\alpha)$$

d'où

$$\square - 2\Delta = \frac{a^2 \sin A}{2}\left[\cos\alpha\cos(A-\alpha) + \sin\alpha\sin(A-\alpha) - 2\sin\alpha\sin(A-\alpha)\right]$$
$$= \frac{a^2\sin A}{2}\left[\cos\alpha\cos(A-\alpha) - \sin\alpha\sin(A-\alpha)\right]$$
$$= \frac{a^2 \sin A\cos A}{2} = \frac{a^2\sin 2A}{4}$$

on trouverait une semblable équation entre le quadrilatère

BB_1PA_1 et le triangle B_1PA_1, et ainsi de suite. La somme de tous les quadrilatères est égale à la surface du polygone donné ABCDE, et la somme de tous les triangles est égale à la surface du polygone inscrit $A_1B_1C_1D_1E_1$. Si l'on représente ces surfaces respectivement par S et S_1, on aura donc l'équation

$$S - 2S_1 = \frac{1}{4}\left\{a^2\sin 2A + b^2\sin 2B + \ldots + e^2\sin 2E\right\}$$

Si S_1 doit demeurer constante, on aura alors, K étant une constante

$$a^2\sin 2A + b^2\sin 2B + \ldots + e^2\sin 2E = 4K$$

Dans cette équation, tout est constant, sauf les grandeurs $a, b, \ldots e$ qui expriment les distances du point P aux sommets du polygone donné. — Mais on sait que

« Si, dans un plan, on donne des points qcq. $A, B, \ldots$ et que d'un point P pris qcq. sur le plan on mène aux points $A, B \ldots$ les droites $a, b, \ldots$; puis qu'on multiplie les carrés de ces lignes par des grandeurs qcq. $\alpha, \beta, \ldots$ et qu'on veuille que la somme des produits soit constante : le lieu des points P est la circonf. d'un cercle, dont le centre est le centre de gravité d'un systèmes de forces parallèles appliquées en $A, B, \ldots$ et égales respectivement à $\alpha, \beta, \ldots$ »

De là suit immédiatement notre théorème général. Que les deux théorèmes énoncés d'abord n'en sont que des cas particuliers, c'est ce qu'il est facile de voir.

Berlin Nov. 1825.

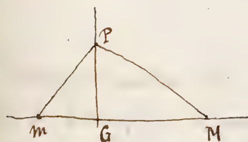
Considérations Géométriques.

(Steiner, – J. de Crelle, 1er Vol. p. 161
en allemand.)

Je passe une préface de trois pages, assez peu importante.

§ I. – Sur la Puissance de Cercles situés dans le même plan.

1.



Si deux droites Mm et PG se coupent à angle droit, et si l'on considère les points m et M comme connus, on a, pour un point P qcq. de PG, la Relation

$$\overline{MP}^2 - \overline{mP}^2 = \overline{MG}^2 - \overline{mG}^2$$

ce qui signifie :

« La différence des carrés des distances de tous les points P de la perp. PG aux deux points donnés M, m, est const. et égale à la diff. des carr. des dist. MG et mG des points M et m à la perp. PG. »

Il suit de là que

« Le Lieu Géom. d'un point P pour lequel la diff. des carr. de ses dist. à 2 points donnés M et m est égale à une const. donnée u^2, est une droite PG perp. sur celle (Mm) qui joint les 2 points. »

Soit a la distance Mm, on aura

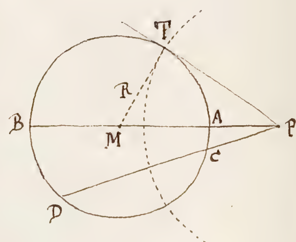
$$MG + mG = a \qquad \overline{MG}^2 - \overline{mG}^2 = u^2$$

d'où

$$MG = \frac{a^2+u^2}{2a} \qquad mG = \frac{a^2-u^2}{2a}$$

2.

On connaît ce théorème élémentaire de Géométrie:
qu'exprime l'équation



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = \cdots$$

J'appellerai ce produit constant, pour un point déterminé, par rapport au cercle donné

« Puissance du point par rapport au cercle »

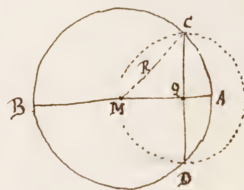
ou inversement

« Puissance du cercle par rapport au point. » (x)

Nous dirons encore que la puissance d'un point par rapt. à un cercle est extérieure ou intérieure selon que le point sera hors du cercle ou dedans.

(x) Les anciens appelaient Puissance de l'Hyperbole la surface constante des parallélogr. inscrits à la courbe et à ses asymptotes.

Si le point P est hors du cercle M, sa puissance est égale au carré de la tangente PT.



Si le point Q est dans le cercle M, sa puissance est égale au carré de la moitié de la < corde CD qu'on peut mener par ce point.

Soit R le rayon du cercle: on aura, pour un point extérieur

$$\overline{PT}^2 = \overline{PM}^2 - R^2$$

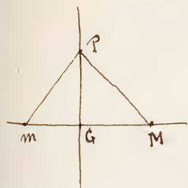
et pour un point intérieur

$$\overline{QC}^2 = R^2 - \overline{QM}^2$$

Donc les points également éloignés du centre d'un cercle ont par rapport à lui même puissance. — Si un point

est sur la circonférence, sa puissance est nulle : et Ré-ciproquement.

3.



Si les points m et M sont les centres de deux cercles, dont les rayons seront R et r, et si le point P est semblablement placé a par rapport aux deux cercles des puissances égales et semblables (c.à.d. toutes deux extérieures ou toutes deux intérieures), on aura alors (2)

$$\overline{MP}^2 - R^2 = \overline{mP}^2 - r^2$$

ou

$$R^2 - \overline{MP}^2 = r^2 - \overline{mP}^2$$

et, dans les deux cas,

$$\overline{MP}^2 - \overline{mP}^2 = R^2 - r^2$$

Donc « Sous la condition énoncée, la différence des carrés des distances du point P aux centres M et m est constante et égale à la différ. des carr. des rayons. »

On en conclut, (1), que

« Le lieu des points P qui ont par rapport à deux cercles des puissances égales et semblables est une droite perp. à la ligne des centres. »

à cause de cette propriété, la ligne droite PG prendra le nom de Ligne des puissances égales des deux cercles M et m. (Pour abréger, je l'appellerai leur axe radi-cal, trad.)

Il résulte de ce qui précède que

1° La bi corde commune de deux cercles ;

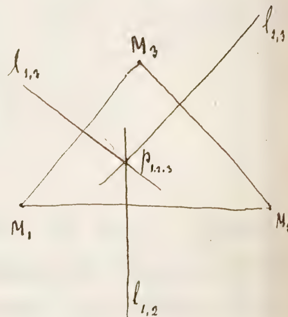
2°. La tangente commune à deux cercles qui se tou-chent ; – coïncident avec leur axe radical.

Cet axe est le lieu d'où l'on peut mener des tan-gentes égales aux deux cercles : – donc ce lieu est une droite perp. à la ligne des centres.

Si d'un point P de cet axe comme centre, avec un rayon égal à l'une des 4 tangentes égales menées aux cercles M et m, on décrit une circonf. elle coupera orthogonalem^t. les 2 premières. Donc :

« Le lieu des centres des cercles qui coupent à angle droit 2 cercl. donnés, est une droite perp. à la ligne des centres. »

4.



Soient M_1 M_2 M_3 les centres de 3 cercles donnés de grandeur et de position. Chaque couple de deux cercles a un axe radical. Soient $l_{1.2}$ $l_{1.3}$ $l_{2.3}$ les trois axes des 3 systèmes de deux cercles.

Le point de rencontre $p_{1.1.3}$ des deux axes $l_{1.2}$ et $l_{1.3}$ a même puissance par rapport aux cercles M_1 et M_2 ; même puissance par rapp^t. aux cercles M_1 et M_3 ; donc aussi par rapp^t. aux cercles M_2 et M_3 : donc $l_{2.3}$ y passe. –

Donc

« Les 3 axes radicaux de 3 cercles se coupent en un même point. »

Steiner appelle ce point le Point des Puissances égales des trois cercles. – Je l'appellerai leur Centre Radical.

Si le point $p_{1.1.3}$ est extérieur aux trois cercles, les six tangentes qui en partent sont égales, et il est le centre d'un cercle qui coupe orthogonalement les trois premiers.

La corde commune de deux cercles étant aussi leur axe Radical, on voit que

« Si trois cercles qcq. se coupent 2 à 2, leurs trois cor-des communes se coupent en un même point, qui est leur centre Radical. » — Et : — « Si trois cercles se touchent deux à deux, les 3 tang. aux points de contact se Rencontrent en un même point. »

on déduit de là les théorèmes suivants :

« Si deux cercles donnés de grandeur et de position sont coupés par un 3e. variable, le lieu des intersections des deux cordes communes variables est l'axe Radical des 2 cercles don-nés. »

on voit facilem.t d'après cela comment on peut construire l'axe Rad. de deux cercles.

« Si le cercle variable était toujours tangt. aux 2 pre-miers et qu'on demandât le lieu des intersect. des tang. aux points de contact, ce serait la même chose. »

Si l'on renverse ce dernier théorème, on a le suivant :

« Si d'un point qcq. de l'axe Rad. de 2 cercl. on leur mène à chacun une tang. les deux points de contact pourront appartenir à un même cercle tg. aux 2 premiers. »

Si l'on mène donc de ce point les 4 tang. aux deux cercles, on déterminera 4 syst. de deux points tels que les deux précédents, qui détermineront 4 cercles tangents aux 2 premiers. — ou en d'autres termes : « tout cercle qui en coupe deux autres orthogonalement y déter-mine 4 points qui déterminent eux-mêmes 4 cercles tg. aux deux premiers.

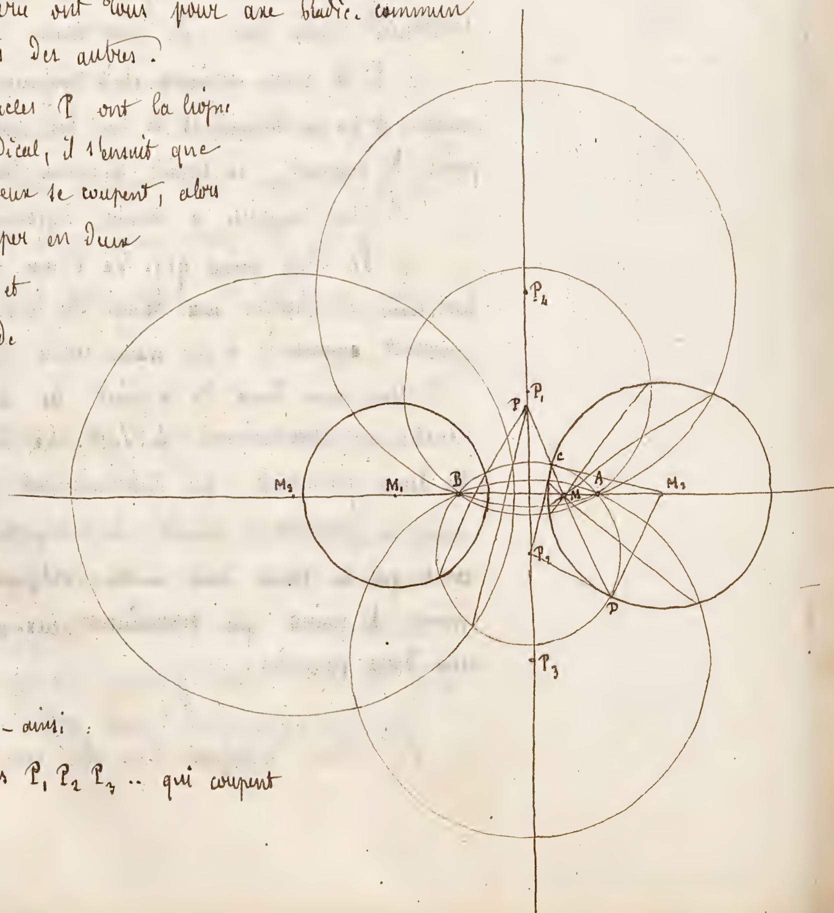
5.

Si l'on imagine tous les cercles possibles P_1 P_2 P_3...

qui coupent à angle droit deux cercles donnés M_1, M_2 ; il est facile de voir que deux qcq. d'entre eux ont pour axe radical la ligne des centres $M_1 M_2$ (car les cercles se coupant à 90° la diff. des carrés des distances de M_1 aux centres de deux cercles P qcq. est évid^t. égale à la diff. des carrés des ray. de ces deux cercles). Donc tous ces cercles P ont tous la ligne des centres $M_1 M_2$ pour axe radical. Donc (3) : le lieu des centres M_1 M_2 M_3 ... des cercles qui coupent à 90° tous les cercles P est la ligne des centres $M_1 M_2$.

Les deux groupes de cercles P et M sont donc dans une telle dépendance, qu'un cercle qcq. d'une série coupe orthogonalem^t. un cercle qcq. de l'autre, et qu'ainsi les cercles d'une série ont tous pour axe radic. commun la ligne des centres des autres.

Puisque les cercles P ont la ligne $M_1 M_2$ pour axe radical, il s'ensuit que si deux qcq. d'entre eux se coupent, alors ils devront tous se couper en deux mêmes points A et B, et auront tous pour corde commune la ligne $M_1 M_2$. — Mais si les cercles d'un groupe P se coupent, deux quelconques de l'autre groupe M ne pourront se couper. — ainsi :



a Tous les cercles P_1 P_2 P_3 .. qui coupent

orthogonalement. Deux cercles donnés extérieurs l'un à l'autre, M_1 et M_2, ou intérieurs l'un à l'autre, M_1 et M_3, se coupent tous aux deux points A et B. » Et

« De tous les cercles $M_1\ M_2\ M_3$ .. qui coupent orthog^t. deux cercles donnés $P_1\ P_2$ lesquels se coupent entre eux : aucun ne peut en couper un autre. »

Les cordes communes au cercle M_2 par exemple et à deux cercles qcq. de la série P se coupant sur un point de la ligne $M_1 M_2$ (qui est l'axe rad. des 2 derniers) : il s'ensuit que toutes ces cordes se coupent en un point déterminé M de cette droite $M_1 M_2$. — Par une raison semblable, toutes les cordes que le cercle P_2 par ex. a de communes avec les cercles $M_1\ M_2\ M_3$ se coupent en un même point P de l'axe $P_1 P_2$. — Remarquons encore que, puisque les cercles se coupent à 90°, les rayons $P_2 C$ et $P_2 D$ par exemple toucheront le cercle M_2 ; et de même les rayons $M_2 C$, $M_2 D$ toucheront le cercle P_2. — De là résultent les théorèmes suivants :

« Si d'un point qcq. M_1, M_2 .. d'une droite qui coupe un cercle donné P_2 on mène des tg. à ce cercle, toutes les cordes de contact passent par un même point P extérieur au cercle, et situé sur le diamètre perp. à $M_1 M_2$. »

« Si d'un point qcq. P_1, P_2 .. d'une droite qui ne coupe pas un cercle donné M_2 on lui mène deux tangentes, toutes les cordes de contact passent par un même point M intérieur au cercle. »

Et réciproquement ....

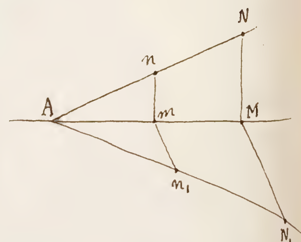
La relation de position qui lie le point P ou M et le lieu $M_1 M_2$ ou $P_1 P_2$ des points de rencontre des tang.

que détermine une corde qcq. passant par ce point, – est aisée à apercevoir. Car les tg. menées du point P au cercle donné C_2 le touchent nécessairement aux points A et B où il est coupé par le lieu $M_1 M_2$: et delà ...

Les mêmes théorèmes ont lieu semblablemt. dans les courbes du second degré. – Il en existe aussi d'analogues pour les surfaces du second ordre.

§II. Du centre et des lignes de similitude chez les cercles situés dans un même plan.

6.

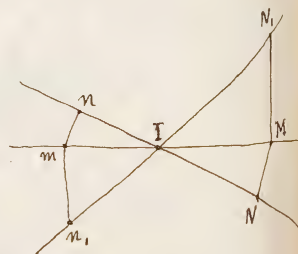


Soient M, m, A trois points qcq. en ligne droite : Par le point A, on tire une droite arbitraire AnN et des points M, m deux parallèles qcq. MN, mn qui rencontrent cette droite AnN. on aura

$$MN : mn :: MA : mA$$

Réciproquemt :

« Si des points M et m on mène deux parallèles qcq. MN_1, mn_1 de telles longueurs que l'on ait $MN_1 : mn_1 :: MA : mA$, leurs extrémités N_1 et n_1 seront en ligne droite avec le point A. »



on trouve un théor. semblable si, au lieu du point A on prend un point I situé entre M et m. – Seulemt. les parallèles seront alors situées de part et d'autre de la droite mM.

7.

Si des deux points donnés M et m comme centres, avec deux rayons arbitraires MN, mn, on décrit deux cercles M et m : on déduit imméd.t de (6) le théorème suivant :

« Dans deux cercles qcq. M et m les extrémités N et n de deux Rayons parallèles MN, mn qui se trouvent $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'un même côté} \\ \text{de part et d'autre} \end{array} \right|$ de la ligne des centres Mm, — sont toujours en ligne droite avec un point déterminé $\left\{ \begin{array}{l} A \\ I \end{array} \right|$ de cette ligne. »

De plus :

« Si des centres M et m on mène des parallèles à une droite qcq. passant par le point A ou I, le Rapport de ces parallèles sera celui des Rayons, » et Réciproquement.

Les points A et I sont les Centres de Similitude Externe et Interne des deux cercles.

Toute droite An_1N_1 ou n_1IN_1 qui passe par le Centre de Sim. s'appellera Ligne de Similitude, Externe ou Interne.

Soient R et r les Rayons des deux cercles. — On a pour déterminer les deux centres de Sim. A et I les Eq.

$$\frac{R}{r} = \frac{MA}{mA} = \frac{MI}{mI}.$$

Il suit delà que si par ex. R = MA, on a aussi r = mA ; et les deux cercles se touchent Intérieurement. en A : et de même si R = MI ....

Réciproquement, on voit que

« Si deux cercles se touchent $\left\{ \begin{array}{l} \text{Extérieurement} \\ \text{Intérieurement} \end{array} \right|$ leur point de contact est leur centre de Sim. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Interne} \\ \text{Externe} \end{array} \right|$

Puisque, dans les deux cercles, les Extrémités de deux Rayons parallèles sont en ligne droite avec le C. de S. : il s'ensuit, en Renversant, que toute droite qui passe par le C. de S. et qui coupe les deux cercles détermine 4 Rayons qui sont 2 à 2 parallèles. — Si donc cette

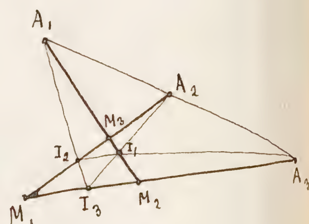
droite touche l'un des cercles, elle touchera l'autre. – donc

« La tangente commune à deux cercles passe par leur C. de Sim. »

De là une construction facile de cette Tg. commune.

Enfin il faut remarquer que, d'après l'Eq. précédente, les C. de S. de deux cercles intérieurs l'un à l'autre sont intérieurs aux deux cercles.

8.



Soient M_1, M_2, M_3 les centres de 3 cercles qcq. donnés de grandeur et de position. – Chaque système de deux cercles a deux centres de Sim. Soient A_3 et I_3, A_2 et I_2, A_1 et I_1 les centres respectifs des systèmes M_1 et M_2, M_1 et M_3, M_2 et M_3.

La ligne $A_3 A_2$ se trouvant une ligne de Sim. et par rapport à M_1 et M_2, et par rapport à M_1 et M_3, sera aussi une L. de S. par rapp^t. à M_2 et M_3 : donc elle contiendra le C. de S. externe A_1 : donc les 3 centres de similitude externe sont en ligne droite. – On conclut de la même manière que les 3 C. de S. $A_1 I_2 I_3$, $A_2 I_1 I_3$, $A_3 I_1 I_2$ sont en ligne droite. Donc

« Les 6 C. de S. que détermin^t. 3 cercles sont 3 à 3 sur 4 droites : les 3 C. de S. Ext. sont en ligne droite, et chacun d'eux est en ligne droite avec les deux C. de S. Int. non correspondants. »

Ces 4 droites, dont chacune passe par 3 C. de S. je les appellerai Lignes de Similitude des 3 cercles donnés : il y en aura une Extérieure, et trois Intérieures.

Puisque les Tg. communes { extérieures / intérieures } à deux cercles

extérieurs l'un à l'autre se coupent au C. de S. { ext. / int. } :
on déduit immédiatement du théorème précédt., le suivt.

« Même énoncé, en remplaçant C. de S. par point de rencontre de tg. communes à deux des 3 cercles donnés. »

Le point de contact de 2 cercles tg. étant leur C. de S. il s'ensuit que :

« Si un cercle en touche deux autres, les deux points de contact sont en ligne droite avec un des deux C. de S. des deux derniers cercles. »

Or comme les points suivant lesquels le cercle M_3 touche les deux cercles M_1 et M_2 sont la réunion de deux des 4 C. de S. A_1, I_1, A_2, I_2 : il s'ensuit que les points de contact seront en même temps formés par la réunion des centres de sim. suivants : ou

(1) A_1 et A_2 et I_1 et I_2

(2) ou I_1 et I_2 et A_1 et A_2

(3) ou A_1 et I_2 et A_2 et I_1

(4) ou A_2 et I_1 et A_1 et I_2

dans les 2 1ers cas ils sont en ligne droite avec le C. de S. Ext. A_3, dans les 2 derniers, avec le C. de S. Int. I_3 des 2 cercles M_1, M_2. — On peut donc préciser mieux le théor. précédt., comme il suit :

« Si un cercle M_3 en touche deux M_1 et M_2 semblablement : ses deux points de contact sont en ligne droite avec le C. de S. Ext. des 2 derniers ; — s'il les touche différemt., ils sont en ligne dr. avec le C. de S. Int. »

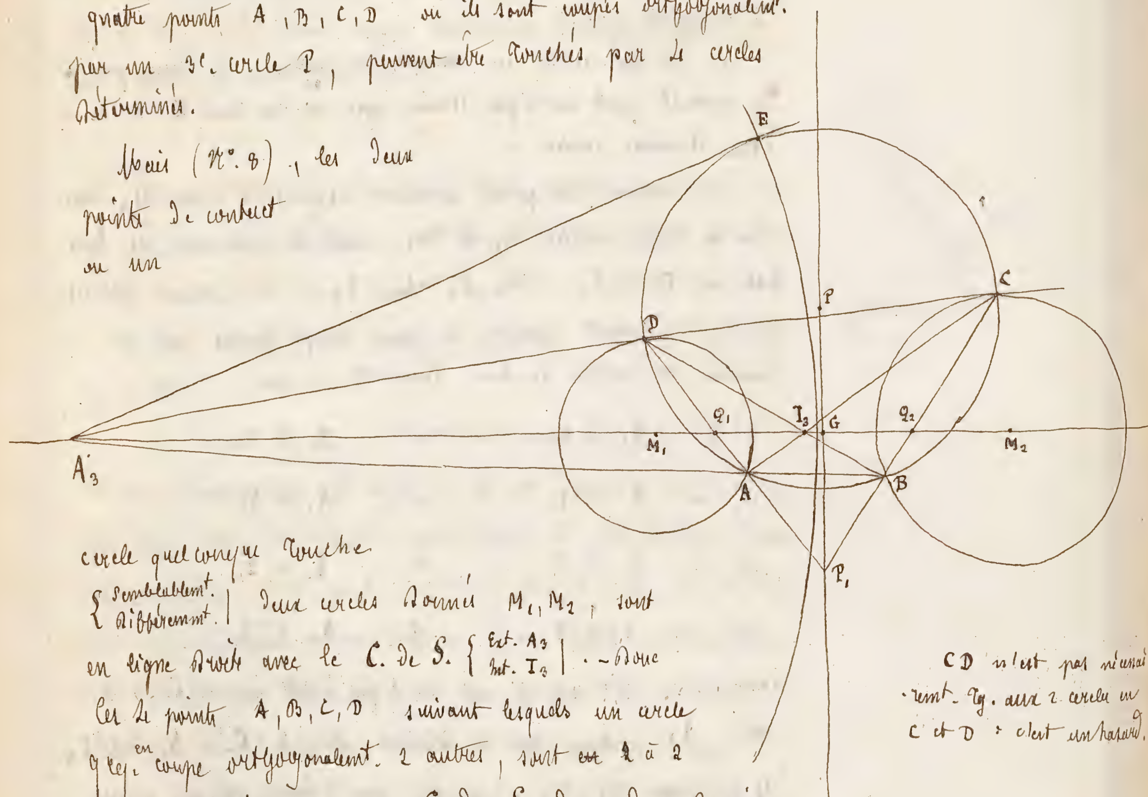
(Semblablemt : c.à.d. tous deux extérieuremt. ou tous deux intérieuremt ; — différt. c.à.d. un extt. et l'autre intt.)

§ III. – Des Puissances Égales, dans les cercles situés sur un même plan.

9.

D'après (§ I N°. 4) deux cercles qcq. M_1, M_2, aux quatre points A, B, C, D où ils sont coupés orthogonalemt. par un 3e. cercle P, peuvent être touchés par 4 cercles déterminés.

Mais (N°. 8), les deux points de contact où un



cercle quelconque touche {semblablemt. / différemmt.} deux cercles donnés M_1, M_2, sont en ligne droite avec le C. de S. {Ext. A_3 / Int. I_3}. – Donc les 4 points A, B, C, D suivant lesquels un cercle qcq. coupe en orthogonalemt. 2 autres, sont 2 à 2 en ligne droite avec les C. de S. de ces deux derniers cercles.

CD n'est pas nécessai-rement. tg. aux 2 cercles en C et D : c'est un hasard.

On déduit de là le théorème :

« Si un cercle qcq. P coupe à angles droits 2 cercles donnés M_1 et M_2 : les 4 points d'intersect. A B C D sont deux à deux en ligne droite avec les C. de S. A_3 et I_3 des deux cercles donnés. »

Ou, ce qui revient au même :

« Si d'un point qcq. P de l'axe Radical PG de deux cercles, on leur mène les 4 tangentes PA, PB, PC, PD : et qu'on joigne deux à deux par six droites les 4 points de contact : deux de ces droites, BA et CD se coupent toujours en un point fixe A_3 (C. de S. Ext.), deux autres AC et BD se coupent en un autre point fixe I_3 (C. de S. Int.) : le lieu des intersections P_1 du 3e. couple DA et CB est la droite PG elle-même (No. 2), et enfin les deux dernières droites DA et CB passent chacune par un point fixe y_1 et y_2 (No. 5). »

Ce n'est là du reste qu'un cas particulier du théor. plus général démontré (No. 8, VII) dans le mémoire précédent.

10.

Puisque tous les cercles P possibles qui coupent orthogonalement deux cercles donnés M_1 M_2 ont tous la droite $A_3 M_1 I_3 M_2$ pour axe radical commun ; et que de plus, ainsi qu'on vient de le prouver, les 4 points où le cercle P coupe les deux autres sont deux à deux en ligne droite avec les C. de S. : — il s'ensuit que les produits $A_3A \times A_3B = A_3D \times A_3C$,

et $I_3A \times I_3C = I_3D \times I_3B$ sont constants, quand le cercle P varie en restant assujetti aux conditions indiquées. Car le premier produit est égal à la puissance du point A_3 par rapport au cercle P, et le dernier, à la puissance du point I_3 par rapport au même cercle P : donc ce sont deux produits constants vu que tous les cercles P, ainsi qu'on l'a déjà Re-

marqué, ont la droite $A_3 I_3$ pour axe radical commun.

Si l'on rapporte cette propriété aux deux cercles donnés M_1, M_2, on trouve le théorème suivant :

« Si du C. de S. A_3 ou I_3 de deux cercles on tire une sécante qcq. A_3AB ou AI_3C : le produit $A_3A \cdot A_3B$ ou $I_3A \cdot I_3C$ des distances du C. de S. aux deux points d'intersection A et B ou A et C correspondants aux deux rayons M_1A et M_2B ou M_1A et M_2C non parallèles, conserve une grandeur constante. »

Nous appellerons ce produit la Puissance commune des deux cercles donnés par rapt. à leur C. de S. A_3 ou I_3.

11.

Mais la puissance du point A_3 par rapport au cercle P, est égale, si les deux cercles M_1 M_2 sont extérieurs (même figure) au carré de la tangente A_3E : donc cette tangente a toujours la même grandeur, quel que soit le cercle P. Si donc avec cette Tg. pour rayon et du point A comme centre on décrit un cercle A_3, il coupera à 90° tous les cercles P. — Semblablement, la puissance du point I_3, qui est intérieur au cercle P, est égale au carré de la moitié de la plus petite corde du cercle P passant par I_3 ; donc cette corde a la même grandeur pour tous les cercles : si donc, avec cette $\frac{1}{2}$ corde pour rayon, on décrit un cercle autour de I_3, ce cercle I_3 sera coupé par chaque cercle P suivant un diamètre : c.a.d. que les points d'intersection seront les extrémités d'un même diamètre du cercle I_3.

Ces deux cercles bien définis, ayant pour centres

les C. de S. A_3 et I_3, et pour Rayons les racines carrées des puissances communes des cercles M_1 et M_2 par Rapport à A_3 et I_3, je les appellerai Cercles de Puissance des deux cercles donnés M_1 et M_2 ; et les cercles A_3 et I_3 seront respectivement les Cercles de Puis. Extérieur et Intérieur.

Il faut encore remarquer que, si les cercles M_1 et M_2 sont intérieurs l'un à l'autre, c'est l'inverse qui a lieu, c. à d. que le Cercle de Puis. Int. I_3 coupe orthogonalement chaque cercle P, et que le C. de P. Ext. A_3 est coupé diamétralement. — Et si enfin les deux cercles M_1 et M_2 se coupent, alors les deux C. de P. tant Ext. qu'Int. coupent orthogonalement chaque cercle P.

12.

Les deux points A et B ou C et D (même fig.) pour lesquels le produit $A_3A \cdot A_3B$ ou son égal est cons-tant, ou qui déterminent la puissance du centre de Sim. A_3, sont situés d'un même côté de ce dernier point (A_3) : — et les points A et C ou D et B qui déterminent la puissance commune des deux cercles donnés par Rapport à leur C. de S. I_3 sont situés de part et d'autre de ce point I_3. — Nous dirons alors que La puissance commune aux deux cercles donnés par Rapport à leur C. de S. A_3 — ou I_3 — est Extérieure ou Intérieure.

Si maintenant deux point q.cq. X et Y sont situés en ligne droite avec A_3, du même côté, et de telle façon que le produit $A_3X \cdot A_3Y$ soit égal à la Puis. Com. des 2 cercles (par Rapt. à A_3), nous di-rons que ces deux points sont En puissance par Rap.

-port au C. de S. A_3 ou I_3 (l'expression allem.de est que « Diese Punkte sind Potenzhaltend »).

Enfin si un cercle qq. K a par rapport à l'un des C. de S. une puissance égale et semblable (Ext. ou Int.) à la Puiss. commune des deux cercles donnés M_1 et M_2 par rapport à ce même C. de S., nous dirons qu'il est en puissance par rapport à ce C. de S. (toujours Potenzhaltend).

Il est clair que tout cercle qui passe par deux points en puissance est lui-même en puissance ; — de plus : tout cercle K en puissance par rapport au C. de S. A_3 coupe orthogonalement le cercle de Puissance A_3, et que tout cercle K en puiss. par rap. au C. de S. I_3 coupe diamétralement le cercle de Puiss. I_3.

Puisque le cercle qui touche semblablemt. les deux cercles donnés aux deux points A et B (ou D et C) est, ~~puisq~~ comme passant par ces deux points, en puissance par rappt. au C. de S. A_3 ; — et que le cercle qui touche différemmt. les deux cercles donnés aux points A et C est en puissance par rappt. au C. de S. Int. I_3 ; — il s'ensuit qu'on a le théorème suivant :

« Tout cercle K qui en touche {semblablemt. / différemmt.} deux autres est en puissance par rapport à leur C. de S. {Ext. A_3 / Int. I_3} et coupe {orthogonalemt. / diamétralemt.} leur cercle de Puiss. {Ext. / Int.} »

On arrive à un théorème semblable, si les cercles donnés, au lieu d'être extérieurs l'un à l'autre, sont intérieurs l'un à l'autre ou se coupent.

13.

Puisque tout cercle K, qui en touche {semblablemt. / différemt.} deux autres est en puissance par rapport à leur

C. de S. $\left\{ \begin{matrix} \text{Ext. } A_3 \\ \text{Int. } I_3 \end{matrix} \right|$, on a les théorèmes suivants :

« Tous les cercles qui touchent $\left\{ \begin{matrix} \text{semblablem}^t. \\ \text{différem}^t. \end{matrix} \right|$ deux cercles donnés M_1, M_2 ont tous pour centre radical commun (ou point des puissances égales) le C. de S. $\left\{ \begin{matrix} \text{Ext.} \\ \text{Int.} \end{matrix} \right|$ de ces deux cercles. »

ou encore

« Si deux cercles qcq. N_1 et N_2 touchent $\left\{ \begin{matrix} \text{semblablem}^t. \\ \text{différem}^t. \end{matrix} \right|$ deux cercles donnés, ~~tout~~ l'axe radical des deux premiers passera par le C. de S. $\left\{ \begin{matrix} \text{Ext.} \\ \text{Int.} \end{matrix} \right|$ des deux derniers. »

Il s'ensuit en outre que :

« Si chacun des deux cercles M_1 et M_2 touche semblablem^t. plusieurs cercles N_1, N_2, N_3, ..., l'axe radical des deux premiers cercles passera par le C. de S. Ext. de deux qcq. des cercles N, et cette série de cercles N aura cet axe radical pour ligne de similitude commune. »

Ainsi : tous les cercles N qui touchent $\left\{ \begin{matrix} \text{semblablem}^t. \\ \text{différem}^t. \end{matrix} \right|$ deux cercles donnés M_1 et M_2 ont pour ligne de similitude commune l'axe radical de ces deux cercles.

La suite de ce paragraphe et le développem^t. des derniers théorèmes restent pour cette fois non achevés, faute d'espace : on les continuera dans un autre mémoire.

---

§ IV. – Généralisation et Solution Géométrique du problème de Malfatti.

Pour montrer, par un exemple qui leur soit approprié, l'utilité des théorèmes exposés dans les paragraphes précédents, nous allons indiquer, quoique sans démonstration,

la solution Géométrique et en même temps la solut. Généralisa-
-tion du problème de Malfatti.

14.

Problème.

« Inscrire dans un triangle 3 cercles qui se touchent tous les trois, et dont chacun touche deux côtés du triangle. »

Énoncé de la solution.

Extension au cas où les côtés du triangle sont des circonférences.

Cas de sphères dans l'Espace.

Le tout sans démonstration.

Quelques Extraits
du
Journal de Liouville.

Sur les Surfaces du 2°. Degré qui n'ont pas de foyers.

Les Surfaces de Révolution du Second Degré se partagent en deux classes, suivant que leur axe de Révolution est

1°. Le grand axe

2°. Le petit axe.

Premier cas. — L'axe de Révolution contenant les foyers de la Section méridienne, la Surface engendrée a elle-même deux foyers (dont l'un peut être à l'infini, c'est le cas du paraboloïde) et un plan directeur correspondant à chaque foyer. De sorte que ces Surfaces sont le lieu géométrique d'un point dont les distances à un point et à un plan fixes sont entre elles dans un Rapport constant.

Ex. Ellipsoïde allongé, hyperboloïde à deux nappes, paraboloïde.

Ces surfaces ont pour caractère de participer aux nombreuses propriétés des Coniques considérées par Rapport à leurs foyers.

Second cas. — L'axe ne contient pas les foyers de la Conique Génératrice. Ellipsoïde aplati, Hyperboloïde à une Nappe, et cylindre parabolique (qu'on peut Regarder comme engendré par une parabole tournant autour de son petit axe situé à l'infini).

Ces trois Surfaces, comme les autres, sont le Lieu Géométrique d'un point tel que le Rapport de ses distances à un point et à une droite fixes soit constant. — Ce point est un foyer d'une des sections méridiennes, et la droite est

la Directrice correspondante à ce foyer.

En effet cette Relation a lieu pour la Section méridienne dont on prend le foyer et la Directrice. Soit μ le Rapport constant. — Menons un plan qcq. perp. à la Directrice. Il coupe la Surface suivant un cercle, la conique méridienne en deux points m et m', la Directrice en un point d. Le Lieu des points dont les distances au foyer F et au point d sont dans le Rapport μ, est, on le sait, une Sphère. Ceux de ces points qui sont dans le plan perp. à la Directrice sont sur un cercle passant par les points m et m' qui satisfont à la condition commune à tous les points de ce cercle. Ce cercle ~~ser~~ aura nécessairement son centre dans le plan de la section méridienne. Il aura donc mm' pour Diamètre. Donc il coïncidera avec celui qui résulte de l'intersection de la Surface et du plan. — Or les distances des points de ce cercle au point d sont aussi les distances à la Directrice. Donc tous les points de la Surface jouissent de la propriété énoncée.

Dans le cas du cylindre parabolique, la section méridienne est la parabole section droite du cylindre, $\mu = 1$ et le cercle d'intersection est une génératrice Rectiligne. La démonstration n'en subsiste pas moins.

Les 3 Surfaces q dont nous parlons jouissent encore d'une propriété commune qu'il convient d'énoncer à part pour le ~~Parab~~ cylindre Parabolique. La voici.

Dans l'Ellipsoïde de Révol. aplati et dans l'Hyp. à une nappe de Rév. si l'on conçoit une Section mérid. le cône ayant pour Sommet un foyer de cette Courbe et pour Base une Section faite dans la Surface par un plan qcq. mené par la Directrice correspondante à ce foyer, ce cône sera de Révolution.

Soit Σ cette dernière section. D'après le théorème précédt. le rapport des distances de tous les points de cette courbe au foyer F et à la directr. D de la section méridienne est constant. Si l'on conçoit un plan fixe qcq. mené arbitrairement par cette directrice, les distances des points de la courbe Σ à ce plan seront proportionnelles à leurs distances à la directrice : donc les distances de chaque point de Σ à ce plan et au foyer F seront dans un rapport constant : donc Σ sera sur une surface de révolution du second degré, qui a son foyer en F et pour plan directeur le plan fixe. Donc, d'après la propriété connue des surfaces de révolution à foyers, Σ sera vue du foyer F suivant un cercle : c'est à d. qu'elle sera sur un cône de révolution ayant son sommet en F, cqfd.

Même théorème pour le cylindre parabolique, et même démonstration.

« Généralisons davantage. — Concevons un ellipsoïde de révolution à foyers ; et prenons un point qcq. de l'axe de rév. pour centre d'une sphère par rapport à laquelle nous formerons la surf. polaire de l'ellipsoïde. (enveloppe des plans de contact des cônes ayant pour base la sphère et pour sommet un point qcq. de l'ellipsoïde). Cette surf. sera évidt. du 2d. degré, de révolution, et aura en direction même axe que l'ellips. aux foyers et plans direct. de celui-ci, correspondront dans la surf. deux points et deux plans, pour lesquels on pourra découvrir ainsi une foule de propriétés nouvelles. »

- Chasles.

Sur les Rayons de Courbure des Sections Coniques.

On peut construire très simplement ces Rayons.

Soit r le Rayon de courbure en m, ρ et ρ' les deux Rayons vecteurs de ce point, $2i$ l'angle de ces deux Rayons vecteurs.

Ellipse et Hyperbole. — Si l'on considère le Triangle etc. — calcul bête. — Résultat curieux

$$r = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{\cos^3 i} = \frac{A}{\cos^3 i}$$

A étant le Ray. de courbure au Sommet.

Pour la Parabole

$$r = \frac{p}{\cos^3 i} = \frac{A}{\cos^3 i}$$

Sur une propriété des Sections Coniques.

Si, par un point qcq. d'une Sect. Conique, on mène les deux Rayons vecteurs et une normale terminée à l'axe des foyers, la projection de cette normale sur l'un qcq. des deux rayons vecteurs est égale au demi-paramètre.

Considérons d'abord l'Ellipse. Soient r et r' les deux Rayons vecteurs, n la normale, p sa projection sur chacun des deux Rayons vecteurs, h et k les distances du pied de cette normale aux deux foyers :- Soient, $2a$ le grand axe, $2b$ le petit, $2c$ la distance focale : de façon que $r+r'=2a$, $h+k=2c$; $a^2-c^2=b^2$. on aura, d'après les propriétés des triangles obliquangles

$$h^2 = r^2+n^2-2pr$$
$$k^2 = r'^2+n^2-2pr'$$

Retranchant membre à membre

$$(h+k)(h-k) = (r-r')(r+r'-2p)$$

ou

$$c(h-k) = (r-r')(a-p)$$

d'où l'on tire

$$c : a-p :: r-r' : h-k \qquad (1)$$

La propriété que possède la normale de partager l'angle des Rayons vecteurs en deux parties égales donne la proportion

$$r : r' :: h : k$$

d'où

$$r+r' : h+k :: r-r' : h-k$$

ou

$$a : c :: r-r' : h-k \qquad (2)$$

Si l'on compare les proport. (1) et (2) on trouve

$$c : a - p :: a : c$$

d'où

$$p = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

$$p = \frac{1}{2} \text{ paramètre} \qquad \text{C q f D.}$$

Le même mode de démonstration s'applique à l'Hyperbole.

Dans le cas de la parabole, l'un des foyers se transportant à l'infini, le rayon vecteur correspondant devient parallèle à l'axe, et la projection sur ce rayon devient égale à la projection sur l'axe : ce qui explique pourquoi, dans cette courbe, la Sous-Normale est constante.

En rapprochant ce théorème de la propriété qu'a le rayon de courbure d'être proportionnel au cube de la Normale, on retrouve la relation

$$\rho \cos^3 i = \frac{1}{2} \text{ paramètre}.$$

E. Payès.

Théorèmes de Géométrie dans l'Espace.

Si, dans un plan, on fait tourner autour de deux points fixes deux droites qui restent toujours rectangulaires, leur point d'intersection décrit une circonférence : et si l'on prend sur la droite qui joint les deux points, deux autres points qui soient conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers, les distances de chaque point de la circonférence à ces deux nouveaux points seront entre elles dans un rapport constant.

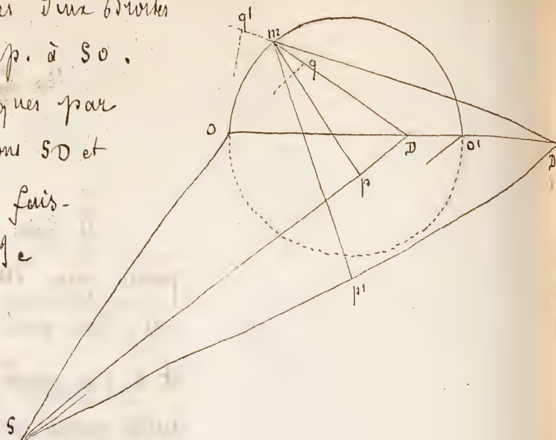
On le sait.

Cherchons les propriétés analogues dans l'espace, pour les plans et les droites.

Prenons d'abord un cas simple. — Si, autour de deux droites fixes situées dans un même plan, on fait tourner deux plans rectangulaires, la droite d'intersection de ces deux plans décrira un cône du second degré qui passera par ces deux droites et dont les sections circulaires seront dans deux systèmes de plans perp. à ces deux droites respectivement.

Il n'y a que la fin qui ne soit pas évidente d'elle-même. or : si deux plans sont rectangul. tout plan perp. à l'un d'eux les coupe suivant deux droites rectang. donc un plan perp. à l'une des droites fixes coupera les deux plans mobiles suivant deux droites rectang. qui, dans le mouvem^t. ultérieur des plans, passeront par 2 points fixes, et engendreront par leur intersect. un cercle. donc -- il est clair que le Th. est démontré.

allons plus loin. _ Soient SO, SO' les deux droites fixes, OO' un diamètre d'un cercle perp. à SO. Soient D et D' deux conjugués harmoniques par rapport à O et O'. ($\frac{DO}{DO'} = \frac{D'O}{D'O'}$). Menons SD et SD'. Les 4 droites en S formeront un faisceau harmonique ($\frac{\sin DSO}{\sin DSO'} = \frac{\sin D'SO}{\sin D'SO'}$). Je dis que les distances de chaque point m de la circonférence aux droites SD, SD' seront dans un rapport constant.



Je dis que $\frac{mp}{mp'} = \text{Const}$.

or on a

$$mp = mD.\sin mDS \qquad mp' = mD'.\sin mD'S$$

$$\frac{mp}{mp'} = \frac{mD}{mD'}.\frac{\sin mDS}{\sin mD'S}$$

Soient Oq et Oq' les perp. du point O sur mD et mD'. on a $Oq = Oq'$: car les angles $qOm = q'Om$ puisque $DmO' = O'mD'$.

Sq et Sq' seront perp. sur mD et mD' (th. des 3 perp.) et égales puisque $Oq = Oq'$.

or

$$Sq = SD.\sin mDS$$
$$Sq' = SD'.\sin mD'S$$

d'où

$$\frac{\sin mDS}{\sin mD'S} = \frac{SD'}{SD}$$

Donc enfin

$$\frac{mp}{mp'} = \frac{mD}{mD'}.\frac{SD'}{SD} = \text{Const}.$$

C.q.f.D.

On voit qu'on peut énoncer cela en disant que les sinus des angles d'une génératrice qcq. Sm avec les deux nouvelles droites SD et SD' sont dans un rapport constant.

on peut encore l'énoncer : Les distances de chaque point de la surface du cône aux deux nouvelles droites sont dans un rapport constant.

Si, par le sommet d'un cône du 2°. degré on mène des droites perp. à ses plans tg. on forme un autre cône du 2°. degré, supplémentaire du 1er. et dont récipr^t. les plans tg. sont perp. aux arêtes du premier. Dans deux cônes supplémentaires, les lignes focales de l'un sont perp. respectiv^t. aux plans des sections circulaires de l'autre (Mémoire sur les propriét. génér. des cônes du 2°. degré, Chasles).

D'après cela, ce qui précède nous donne, par la considération du cône supplém^re. cet autre théorème.

Etant donnés deux plans fixes, si un point de leur intersection est pris pour le sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés restent dans les plans fixes : – le plan de cet angle droit enveloppera un cône du 2°. degré ; – Les lignes focales de ce cône seront respectiv^t. perp. aux deux plans fixes ; – Si par l'intersection des deux plans on en mène deux autres qui leur soient conjugués harmoniques, les sinus des angles que le plan de l'angle mobile fait avec ces deux nouveaux plans sont dans un rapp. constant.

Si les deux droites fixes ne sont pas dans le même plan, on a les mêmes propriétés pour l'Hyperboloïde qui remplace le cône. Elles se démontrent de même.

Puis des digressions sur des coniques sphériques, de moi inconnues. (Chasles, J. de Liouville 1836).

Solution d'un problème d'analyse.

Quelle doit être la valeur de $\varphi(x)$ pour que, de x_0 à x_1 on ait toujours

$$\int_{x_0}^{x_1} x^n \varphi(x)\, dx = 0 \qquad (1)$$

$\varphi(x)$ ne passant pas par l'infini, et n étant un nombre entier, $0, 1, 2, 3 \ldots$? — Je dis que la fonction $\varphi(x)$ est identiquement nulle de x_0 à x_1. Car, si elle ne l'était pas : il faudra qu'elle change de signe un certain nombre de fois dans l'intervalle, sans quoi tous les éléments de l'intégrale seraient de même signe et elle ne pourrait être nulle. — Supposons qu'elle change m fois de signe pour les valeurs $a_1, a_2, \ldots a_m$. Faisons $\psi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$, En développant, on aura

$$\psi(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m .$$

Cela posé : si, dans l'équation (1) on fait success^t. $n = m, m-1, m-2, \ldots 1, 0$ et qu'on ajoute membre à membre toutes les équations ainsi obtenues après les avoir multipliées respect^t. par $1, A_1, A_2 \ldots A_m$ on aura

$$\int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\, \varphi(x)\, dx = 0$$

Équation absurde puisque $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ changent de signe en même temps, et que le produit n'en change pas. Donc on a toujours $\varphi(x) = 0$. (Liouville).

Sur les courbes du 2e. ordre.

Dans la discussion de ces courbes, on néglige à tort le cas où $B^2 - 4AC = \pm\infty$: alors l'ellipse se réduit à une droite de grandeur finie ou à deux droites parallèles, et l'hyperbole à une droite illimitée ou à deux parallèles. — Cette omission est souvent nuisible. Ainsi l'on dit que la parabole est la limite d'une ellipse variable qui a un sommet et un foyer voisin fixes, et dont le centre décrit une droite en s'éloignant du foyer fixe : mais si le centre s'en approche, en prenant une direction opposée, on obtient successivement un cercle, une droite limitée, une hyperbole qui coupe la parabole limite, ensuite une droite tangente à cette parabole, et finalement une série d'hyperboles extérieures à la parabole, et qui vont sans cesse en se rétrécissant et finissent par se confondre avec cette courbe, de sorte que la parabole doit être considérée comme ayant à l'infini deux centres, l'un intérieur, l'autre extérieur.

Sur les Moyens de Généraliser certains Théorèmes de Géométrie.

Soient sa, sb deux demi-diamètres conjugués d'une conique c, on aura

$$\overline{sa}^2 + \overline{sb}^2 = \text{Const}.$$

Concevons un cercle c' concentrique à la conique, et soient sa', sb' ses rayons dirigés suivant les demi-diamètres sa et sb : on aura

$$\frac{\overline{sa}^2}{\overline{sa'}^2} + \frac{\overline{sb}^2}{\overline{sb'}^2} = \text{Const}.$$

Projetons, par des droites parallèles entre elles, la conique et le cercle sur un même plan : on aura deux coniques, C et C', en projection. Soient SA, SB ; SA', SB' les demi-diamètres de ces deux courbes, correspondants respectivt. aux demi-diamètres des deux premières : on aura

$$\frac{sa}{sa'} = \frac{SA}{SA'} \qquad \frac{sb}{sb'} = \frac{SB}{SB'}$$

Donc

$$\frac{\overline{SA}^2}{\overline{SA'}^2} + \frac{\overline{SB}^2}{\overline{SB'}^2} = \text{Const}.$$

Or sa et sb étant conjugués par rapport à la conique c, SA et SB le sont par rapport à C, parce que la tg. en a étant parallèle à sb, celle en A l'est à SB. — L'Eq. précédente exprime donc ce théorème :

Etant données deux coniques dans un plan, la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués de la 1ère divisés respectivt. par les carrés des demi-diamètres

de la seconde qui leur sont parallèles, est constante.

Si la première conique est un cercle, on conclut de ce théorème le suivant

La somme des valeurs inverses des carrés de deux demi-diamètres rectangulaires d'une conique est constante.

Prenons sur un plan la perspective C d'une conique c et de plusieurs systèmes de ses diamètres conjugués. On aura en perspective plusieurs systèmes de deux droites passant toutes par un même point fixe. Tous ces systèmes de deux droites jouissent de propriétés analogues à celles des systèmes de deux diamètres conjugués, mais plus générales, et qui redonneront celle-ci comme cas particulier quand le point fixe deviendra le centre de la conique.

Soit s le centre de la conique c, et S sa perspective. — La propriété caractéristique du point s, c'est que, si l'on mène deux tangentes parallèles, à la courbe c, la droite qui joint les points de contact passe par le point s. Les perspectives de ces deux tangentes se couperont sur l'intersection I du plan de C avec un plan mené par l'œil parallèlem.t au plan de c : I pouvant être regardé comme la perspect. d'une droite qcq. située à l'infini dans le plan de c. — Donc, si d'un point qcq. de I l'on mène deux tangentes à C, la cord. de contact passera par le point S, lequel est donc le pôle de I par rapport à la conique C.

Dans la conique c, les tangentes à la courbe menées aux extrémités d'un des deux diamètres conjugués sont

parallèles à l'autre. — On en conclut que, dans le plan de la Conique C, la propriété caractéristique de deux droites correspondantes à deux diam. conj. de C, c'est que : Les Tangentes à C aux points où l'une des droites la rencontre se croisent au point où l'autre droite rencontre l'axe I. Ce point est précisément le pôle de la première droite. On peut donc dire que les deux droites sont telles que chacune d'elles passe par le pôle de l'autre : ce pôle étant pris par rapport à C. Ces deux droites passent par le point fixe S : nous les appellerons axes conjugués relatifs au point S.

Il y a une infinité de systèmes d'axes conjugués pour un même point. — Nous allons en étudier les propriétés.

Lemme. Quand deux figures planes sont la perspect. l'une de l'autre, le rapport des distances d'un point qcq. de la première à deux droites fixes de cette figure est au rapport des distances du point homologue de la seconde aux deux droites correspondantes, dans un rapport constant.

La démonstration est facile.

Une droite, dans chacune des deux figures, peut être prise à l'infini. De là deux Corollaires.

Coroll. I. Quand deux fig. planes sont la persp. l'une de l'autre, la distance d'un point qcq. de la 1ère. à une droite fixe du plan est dans une raison constante avec le rapport des distances du point homol. de la 2e. figure à deux droites fixes, l'une correspond. à celle de la 1ère. figure, l'autre intersect. du 2e. plan par un plan mené par l'œil parallt. au premier.

Cor. II. Quand ---, si l'on mène dans la 1ère la droite correspondante à l'infini de la seconde, et dans le plan

de celle-ci la droite corresp[t]. à l'infini de la première, les distances de deux points homologues qcq. des deux figures à ces deux droites respect[t]., auront leur produit constant.

Cela posé, reprenons les coniques c et C, et le point S perp. du centre s. — Il y a dans l'espace une infinité de coniques c ayant pour perp. C tandis que leurs centres s corresp. au point S. — Parmi cette infinité de coniques c prenons celle qui sera telle que l'angle de deux qcq. de ses diam. conj. sera le même que l'angle des axes conj. corresp. relatifs au point S. — Cette courbe particulière c s'obtient aisém[t]. Par la polaire de S menons un plan qcq. puis un second ~~qui~~ bissecteur du dièdre dont la polaire est l'arête. Du point S abaissons sur ce dernier plan une perp. qui rencontre le 1[er]. en un point qu'on prendra pour l'oeil. Un plan qcq. parallèle au 1[er]. détermine la conique c demandée. — Dém. facile. —

D'après cela appliquons le 1[er]. coroll. aux 2 courbes c et C.

Menons par s et S deux droites corresp. qcq, sq et SQ. Soient a, A deux points corresp. qcq. des deux courbes ; aq, AQ les perp. ~~ab~~ abaissées de ces points sur sq et SQ, et AP la perp. abaissée de A sur la polaire de S. — on aura (1[er]. coroll)

$$aq = \lambda \frac{AQ}{AP} \qquad \lambda = \text{const}^{e}.$$

Or aq et AQ sont les perp. sur sq et SQ. Donc

$$aq = as \cdot \sin asq$$

$$AQ = AS \cdot \sin ASQ$$

Mais la droite sS étant par hypoth. perp. au plan bissecteur des plans des deux coniques, il s'ensuit que l'angle

des deux droites sa, sq est égal à l'angle de SA et SQ. Donc on aura

$$\frac{aq}{AQ} = \frac{aS}{AS}$$

La 1ère Eq. devient donc

$$Sa = \lambda\,\frac{SA}{AP}$$

Cette Eq. est très-importante. Elle sert à appliquer aux axes de la conique C, relatifs au point S, les propriétés des diamètres de la conique c. — Il est important de remarquer que les angles de ces axes entre eux sont égaux aux angles des diamètres correspondants. — appliquons immédt. cette méthode.

Dans une conique, il existe un système de deux diamètres conj. rectangulaires, et ces diam. sont max. et min. parmi tous les autres. Donc : — Dans une conique, parmi les systèmes de deux axes conjugués SA, SA' relatifs à un point S, il y en a un où ces axes sont rectangulaires : et pour eux les rapports $\frac{SA}{AP}$, $\frac{SA'}{A'P'}$ sont, respt. max. et min.

La somme des inverses des carrés de deux $\frac{1}{2}$ diam. rectang. est constante. Donc : — Pour deux axes non conjugués SA, SA' menés à angle droit, on a $\left(\frac{AP}{SA}\right)^2 + \left(\frac{A'P'}{SA'}\right)^2 = \text{Const.}$

La somme des carrés de deux $\frac{1}{2}$ diam. conj. est constante. Donc : — Pour deux axes conjugués $\left(\frac{SA}{AP}\right)^2 + \left(\frac{SA'}{A'P'}\right)^2 = \text{Const.}$

La somme des carrés des projections de deux diam. conj. sur une droite est const. c.à.d. que la somme des carrés de deux $\frac{1}{2}$ diam. conj. multipliés respt. par les carrés des cos. de leurs angles avec une droite fixe, est const. — Donc : — Pour deux axes conj. les carrés $\left(\frac{SA}{AP}\right)^2$ et $\left(\frac{SA'}{A'P'}\right)^2$ multipl. respt. par les carrés des cosin. des angles des axes avec une droite fixe, ont une somme const. — Ce qu'on peut énoncer : La somme des carrés des perp. de A et A' sur une

droite passant par S, divisée resp^t. par les carrés des dist. de A et A' à la pol. de S, est constante.

Si la droite menée par le point S est parallèle à la po-laire, l'énoncé devient : — La somme des carrés de deux axes conj. divisés resp^t. par les carrés des segments compris sur ces axes entre leurs extrémités et la polaire, est constante.

La somme des carrés des perp. abaissées des 2 extrémités de deux diam. conj. q.cq. sur une droite fixe est constante. Donc : — id. pour les carrés des rapports $\frac{SA}{AP}$.

Si la droite fixe est prise à l'infini, on emploie le 2^d. corollaire, et : — Dans une conique, les carrés des inverses des distances des 2 extrémit. de 2 axes conj. q.cq. à la polaire, font une somme constante.

La position qu'on a supposée aux deux courbes c, C conduit naturellem^t. à la découverte des foyers et à la démonstration de leurs propriétés. Car si l'on suppose que la courbe c soit un cercle, Sa = rayon, donc $\frac{SA}{AP}$ = const. ce qui est une propriété caractéristique des foyers.

On peut déduire ainsi toutes les propriétés des foyers de celles du cercle. — En voici un exemple.

Si, autour d'un point fixe o pris dans le plan d'un cercle, on fait tourner une transversale qui rencontre la circonférence en deux points a et a' : soient aq, a'q', oq'' les perp. abaissées des trois points a, a', o sur la polaire du point fixe, on démontre facilem^t. que l'on a

$$\frac{1}{aq} \pm \frac{1}{a'q'} = \frac{2}{oq''} = \text{Const.}$$

quelle que soit la transversale : ± selon que le point o

est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle.

Dans la conique C, persp. du cercle, à la transversale oaa' correspondra une transversale OAA' menée par le point fixe O : au centre du cercle correspondra le foyer de la conique : à la droite située à l'infini dans le plan du cercle correspondra la directrice relative à ce foyer. Soient AP, $A'P'$ les perp. abaissées sur cette directrice, et AQ, $A'Q'$ celles sur la polaire de O. on aura (1er coroll.)

$$aq = \lambda \frac{AQ}{AP} \qquad a'q' = \lambda \frac{A'Q'}{A'P'}$$

Donc l'Eq. précédente devient

$$\frac{AP}{AQ} \pm \frac{A'P'}{A'Q'} = \text{Const.}$$

Ce qui s'énonce : — Si autour d'un point fixe pris dans le plan d'une conique on fait tourner une transversale qui rencontre la courbe en deux points, la somme ou la différence des distances de ces deux points à la directrice de la conique (ou de leurs distances au foyer, qui leur sont proportionnelles), divisées respect. par leurs distances à la polaire du point fixe, sera constante.

Ce sera la somme si le point O est intérieur, la différence, si extérieur.

Si le point fixe est le centre de la courbe, sa polaire est à l'infini, et le théor. devient la propriété connue du foyer : — La somme ou la différence (selon que Ell. ou Hyp.) des rayons vecteurs menés d'un foyer d'une conique aux deux extrémités d'un diamètre, est constante.

Cet ex. suffit pour montrer la fécondité de la méthode.

Les considérations de perspective dont on s'est servi peuvent se transformer en considérations de géométrie plane, et conduire à une méthode différente, mais seulement pour la forme.

Reprenons les deux courbes c et C dans l'espace. – Puisque deux droites sa, sb, menées par le point s, dans le plan de la première, font entre elles un angle égal à celui des deux droites correspondantes SA, SB dans le plan de la seconde courbe, on voit que si, sur celles-ci, on prend des lignes SA', SB'.. égales aux lignes sa', sb', .. leurs extrémités seront sur une conique C' ayant son centre en S, et qui sera égale à la courbe c. ainsi l'on aura entre cette conique C' et la conique C la relation

$$SA' = \lambda . \frac{SA}{AP}$$

on conclut de là ce théor. de Géométrie plane

Etant pris un point fixe S dans le plan d'une conique, si de ce point on mène une droite à chaque point A de la courbe, et que, AP étant la distance de ce point à la polaire du point fixe, on prenne sur SA un segment SA' proportionnel à $\frac{SA}{AP}$, le point A' sera sur une section conique C' qui aura son centre au point fixe.

Si le point fixe est un foyer de la conique proposée, la nouvelle courbe sera un cercle.

La conique C' peut être regardée comme la projection de c au moyen de droites parallèles, perp. au plan bissecteur des angles de c et C. Donc toute figure tracée dans le plan de c se reproduira égale dans la courbe C'.

Les courbes C' et C sont homologiques (Poncelet): le point S est centre d'homologie: et l'intersection des plans c et C est l'axe d'homologie.

Généralisons davantage, et cherchons les propriétés de certains systèmes de trois demi-diam. d'une conique, ou ~~voir~~, ce qui revient au même, des 3 extrémités de ces

Demi-Diamètres. — Nous prendrons une Ellipse.

Concevons une Sphère, et trois de ses Rayons Rectangulaires : par leurs Extrémités menons un plan qui coupera la Sphère suivant un cercle : concevons le Diamètre qui passe par le pôle de ce cercle. Si autour de ce Diam. on fait tourner le Système des trois Rayons Rectangulaires, il est évid[t]. que leurs Extrémités se mouvront sur le cercle, ce qui prouve qu'il y aura une Infinité de Systèmes de trois Rayons Rectangulaires qui s'appuieront sur le cercle passant par les Extrémités des trois premiers Rayons.

Maintenant, supposons que la Sphère étant rapportée à trois axes coordonnés, à chacun de ses points ayant pour coordonnées x, y, z corresponde dans l'espace un point qui ait pour coordonnées suivant les mêmes axes $\lambda x, \mu y, \nu z$. Ce nouveau point appartiendra à un Ellipsoïde : et l'on Reconnaît aisément que, à trois Rayons Rectangulaires de la Sphère correspondent trois Demi-Diamètres conjugués de l'Ellipsoïde ; et qu'à une section plane de la Sphère correspond une Section plane de l'Ellipsoïde.

Il Résulte de là que

Le plan mené par les Extrémités de trois Demi-Diam. Conj. d'un Ellipsoïde coupe cette Surface suivant une Ellipse E sur laquelle on peut prendre une Infinité d'autres Systèmes de trois points qui seront aussi les Extrémités de 3 Demi-Diam. conjugués.

Ce sont là les Systèmes de trois points que nous allons considérer dans l'Ellipse. — Mais il convient de les Définir au moyen de la courbe même à laquelle ils appartiennent. — Soient A, B, C les trois points, extrémités de 3 Demi-Diam. conj. OA, OB, OC de l'Ellipsoïde. Concevons le plan Tg. à cet Ell. au point A.

il sera parallèle au plan de OB et OC. La trace de ce plan tg. sur celui de l'Ellipse E, c.a.d. la tg. à cette courbe, sera donc parallèle à la corde BC. Donc le diamètre de la courbe qui aboutit en A passe au milieu de la corde BC. — Pareillem^t. les diam. aboutissant en B et C passent par les milieux de AC et AB. Donc le centre de l'Ellipse est le centre des moyennes distances des 3 points A, B, C.

Récipr^t. si 3 points A, B, C jouissent de cette propriété, ils sont les extrémités de 3 diam. conj. de l'Ellipsoïde. Car l'un de ces points étant pris arbitrairem^t. les 2 autres sont déterminés. — Si on a A par ex. on prend O', centre de l'Ellipse E. On mène O'A, et on prolonge : $O'a = \frac{1}{2} O'A$. Par a, on mène une parallèle à la tg. en A : et l'on a ainsi B et C.

Pour abréger, nous appellerons points conjugués les 3 points A, B, C ainsi définis.

Démontrons leurs propriétés.

Le tétraèdre formé par 3 demi-diam. conj. d'un Ellipsoïde est constant. Donc : — L'aire du triangle formé par 3 points conj. est constante.

Quand on a deux systèmes de demi-diam. conj., le tétraèdre construit sur un $\frac{1}{2}$ diam. du 1er. système et deux $\frac{1}{2}$ diam. du 2^d. a le même volume que le tétr. constr. sur les 3 autres $\frac{1}{2}$ diam. Donc : — Th. analogue pour les triangles formés avec 2 syst. de 3 points conj.

La somme des carrés de 3 diam. conj. de l'Ellipsoïde est constante. Or ici le centre de l'Ellipsoïde est indéterminé. Donc : — La somme des carrés des rayons menés d'un point fixe de l'espace à 3 points conj. est constante. — Cette démonstration ne s'applique

qu'à un point pris hors du plan de la courbe : puisqu'un point du plan ne peut être centre de l'Ellipsoïde. Mais du cas général où le point O est dans l'espace, on peut conclure le théorème pour un point O'', project. de O sur le plan de la courbe. Car

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = \text{Const}.$$

Mais

$$\overline{OA}^2 = \overline{OO''}^2 + \overline{O''A}^2 , \quad \overline{OB}^2 = \overline{OO''}^2 + \overline{O''B}^2 , \quad \overline{OC}^2 = \overline{OO''}^2 + \overline{O''C}^2$$

donc

$$\overline{O''A}^2 + \overline{O''B}^2 + \overline{O''C}^2 + 3\,\overline{OO''}^2 = \text{Const}.$$

$$\overline{O''A}^2 + \overline{O''B}^2 + \overline{O''C}^2 = \text{Const}.$$

(car on peut s'arranger pour que OO'' soit constant.) – donc le théorème est général.

La Somme des carrés des perp. abaissées des Extrémités de 3 Demi. Diam. conj. sur un plan Diamétral, est constante : qu'on prenne le plan Diamétral perp. au plan de la Conique, on en conclut que : – La Somme des carrés des perp. abaissées de 3 points conj. d'une Ellipse sur une Droite fixe menée dans le plan de cette courbe, est constante.

La Somme des carrés des 3 faces au Sommet du Tétraèdre formé par 3 ½ Diam. conj. est const. Donc : – Dans le Tétraèdre qui a pour Sommet un point fixe de l'Espace et pour Base le Triangle formé par 3 points conj. qcq. la Somme des carrés des 3 faces au Sommet est const. Et comme la Base a une aire const. on peut dire que la Somme des carrés des 4 faces du Tétraèdre est Constante.

La Somme des carrés des projections des 3 faces au Sommet du Tétraèdre formé par 3 ½ Diam. conj. sur un plan fixe, est const. – Donc : même propriété pour le Tétraèdre formé en joignant 3 points conj. qcq. à un point fixe de l'Espace.

Si le plan fixe sur lequel on projette est le plan même de la figure, on en conclut que : — Un point fixe pris dans le plan d'une conique étant le sommet commun à 3 triangles ayant pour bases les 3 côtés du triangle formé par 3 points conj. qcq. la somme des carrés des aires de ces 3 triangles sera constante.

Puis viennent qq. propriétés compliquées.

Les modes de généralisation par project. et persp., que nous avons appliqués aux diam. conj. s'appliquent aussi aux propriétés des syst. de 3 points conjugués. ainsi par ex. le théor. qui commence la page précédte donnera :

Etant données deux coniques dans un plan : si, sur la première, on prend 3 points conjugués qcq. et que du centre de la seconde on mène des rayons à ces 3 points, la somme des carrés de ces 3 rayons divisés respectt. par les carrés des ½ diam. de la 2e conig. compris sur ces rayons, sera constante.

Si les deux coniques sont concentriques, et que la 1ère soit un cercle, les 3 points conj. diviseront la circonférence en 3 parties égales, et les 3 rayons partageront l'espace angulaire autour du centre en 3 parties égales. d'où : — Si par le centre d'une conique on mène 3 demi-diam. divisant l'espace angul. en 3 parties égales, la somme des carrés des inverses de ces 3 ½ diam. est const.

(Charles. J. Liouv. 1837)

Sur quelques propriétés générales des surfaces gauches.

Th : Tout plan mené par une génératrice d'une Surf. gauche touche la surface en un point et lui est normal en un autre point. — Ces deux points sont tels que le produit de leurs distances à un certain point fixe situé sur la génératrice est constant.

Démonstration compliquée.

(Chasles. id.)

Sur un Problème de Combinaisons.

Trouver le nombre des termes du développement de

$$(a+b+c+\dots+l)^m$$

les lettres $a, b, \dots l$ étant au nombre de n.

Le terme général est

$$\frac{1.2.3\dots m}{(1.2\dots\alpha)(1.2\dots\beta)\dots(1.2\dots\lambda)}\, a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda \qquad (1)$$

si

$$\alpha+\beta+\dots+\lambda = m \qquad (2)$$

Le nombre des termes du développement est celui des solutions en nombres entiers non négatifs de l'Eq. (2), qui renferme n inconnues ; — ou le nombre des manières dont il est possible de former une somme m avec n nombres entiers, positifs ou nuls ; — ou enfin le nombre de combinaisons que l'on peut effectuer avec n lettres différentes en les prenant m à m, et en supposant que chacune peut entrer $0, 1, 2, \dots m$ fois dans chaque terme.

On doit trouver

$$N = \frac{n+m-1}{1}\cdot\frac{n+m-2}{2}\cdots\frac{n+1}{m-1}\cdot\frac{n}{m}$$

ou

$$N = \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdots\frac{m+n-1}{n-1}.$$

Détermination de l'Intégrale Définie

$$\int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx$$

Dans le 17e. cahier du Journ. de l'Ec. Pol. Mr. Poisson a trouvé

$$\int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx = 0 \quad \text{si } a<1$$

$$= \pi \log(a^2) \quad \text{si } a>1$$

Ces formules se déduisent très-simplement du Théorème de Côtes.

Ce Théorème donne

$$\left(1-2a\cos\frac{\pi}{2n}+a^2\right)\left(1-2a\cos\frac{3\pi}{2n}+a^2\right)\cdots\left(1-2a\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+a^2\right)=a^{2n}+1$$

Chaque facteur du premier membre est compris dans la formule générale $1-2a\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n}+a^2$ dans laquelle il faut donner à i successivement les valeurs $0, 1, 2 \ldots n-1$; pour passer d'un facteur au suivant, il faut augmenter i de l'unité, ou, ce qui revient au même, augmenter l'arc compris sous le signe cos. de la quantité constante $\omega=\frac{\pi}{n}$. — Si nous élevons les deux membres de l'Equat. à la puissance ω, nous aurons

$$\left(1-2a\cos\frac{\pi}{2n}+a^2\right)^\omega\left(1-2a\cos\frac{3\pi}{2n}+a^2\right)^\omega\cdots\left(1-2a\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+a^2\right)^\omega=\left(a^{2n}+1\right)^{\frac{\pi}{n}}$$

Prenant les Logarithmes, il viendra

$$\Sigma.\,\omega\log\left(1-2a\cos\frac{2i+1}{2n}\pi+a^2\right)=\log.\left(a^{2n}+1\right)^{\frac{\pi}{n}}$$

ou bien, en posant $\frac{2i+1}{2n}\pi=x$,

$$\Sigma . \omega \, \mathrm{Log}\left(1 - 2a \cos x + a^2\right) = \mathrm{Log}\left(a^{2n} + 1\right)^{\frac{\pi}{n}}$$

Le signe Σ indique une somme prise relativemt. à la variable x, qui croît depuis $x = \frac{\pi}{2n}$ jusqu'à $x = \frac{2n-1}{2n}\pi$ par différences constantes et égales à ω.

Si nous supposons maintenant que n croisse indéfiniment, ω deviendra dx, la somme Σ se changera en une intégrale définie prise entre $x = 0$ et $x = \pi$, et le premier membre de l'équation deviendra

$$\int_0^{\pi} \mathrm{Log}\left(1 - 2a \cos x + a^2\right) dx$$

Quant au second membre,

1°. Si $a < 1$, $\left(a^{2n}+1\right)^{\frac{\pi}{n}}$ se réduit à 1. Donc ...

2°. Si $a > 1$, $\left(a^{2n}+1\right)^{\frac{\pi}{n}}$ se réduit à $a^{2\pi}$. Donc ...

C q f D.

(Ch. Delaunay, 1834)

Sur le Centre instantané de Rotation.

On connaît ce Théorème, dû à M. Chasles:

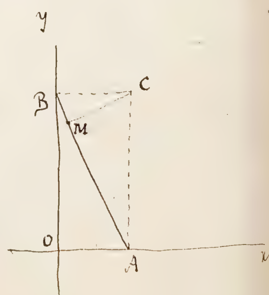
Lorsqu'une courbe est décrite par un point d'une figure en mouvement dans son plan, la normale à cette courbe s'obtient en joignant le point décrivant au centre instantané de Rotation.

Donnons quelques Exemples de l'avantage qu'on tire de la considération de ce centre instantané.

1°. Du centre instantané de Rotation considéré dans ses Rapports avec la Théorie des Enveloppes.

L'enveloppe d'une courbe mobile étant la courbe qui la touche dans toutes ses positions, on en conclut que la trajectoire du point de contact de l'enveloppe et de l'enveloppée est tangente elle-même à ces deux lignes. Par conséquent on obtiendra les points de contact de la courbe mobile avec son Enveloppe en menant à l'une des deux des normales par le centre instantané de Rotation.

Exemple I. Construire l'enveloppe des positions successives d'une droite de longueur constante qui glisse sur les côtés d'un angle droit.

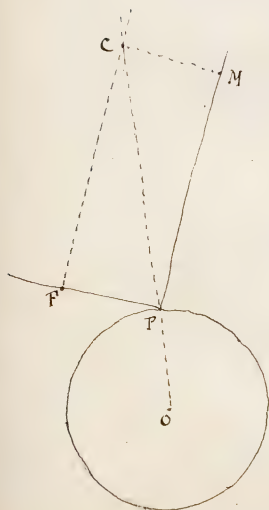


Soit AB une position de l'Enveloppée. Menons AC, BC perp. sur ox et oy. C sera le centre instantané de Rotation. – Donc M appartient à l'Enveloppe.

Si l'on part de cette construction, l'équation de la courbe se trouve bien plus facilement que par la méthode ordinaire.

Exemple II. — Construire l'enveloppe des positions d'une ligne droite qui se meut en formant constamment le même angle avec une courbe donnée.

Par le point de rencontre de la droite mobile avec la courbe directrice, menons la normale à celle-ci. Ces deux droites formeront un angle égal au complément de l'angle donné: et l'on pourra imaginer que ce dernier se meut de manière que, son sommet restant sur la courbe, l'un des côtés lui soit constamt. normal: les intersections successives de l'autre côté formeront l'enveloppe cherchée. — or le centre instantané de rotation de la figure n'est autre chose que celui de la normale, c. à d. le centre de courbure de la directrice. Donc, si de ce point on abaisse une perp. sur la droite mobile, son pied sera sur l'enveloppe cherchée.



Exemple III. — Étant donnés un point fixe et une circonférence, on propose de construire l'enveloppe des positions successives de l'un des côtés d'un angle droit dont le sommet se meut sur la circonférence, tandis que l'autre côté passe constamment par le point fixe?

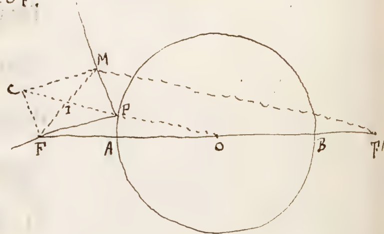
Soit FPM une des positions de la figure mobile. Joignons le sommet P de l'angle droit au centre O de la circonférence. Prolongeons OP jusqu'en C, rencon-

-tre avec FC perpendiculaire sur FP. Le point C est le centre instantané de Rotation. (Car si l'on prenait une position FP' infin.t voisine de FP, et P'F' = PF, le point F', en se Rapprochant de F, décrirait une courbe Tangente à PF). — abaissons CM perp. sur PM. Le point M appartient à la courbe cherchée (qui est une conique).

2°. Du centre instantané de Rotation considéré comme moyen de démontrer certains Théorèmes de Géométrie.

En voici deux Exemples.

D'abord, reprenons l'exemple précédent. — Soit OF' = OF. Joignons MF, MF'. — I est le milieu de FM, O celui de FF'. Donc



$2.IO = MF'$ ou

$$MF' = 2.OP + 2.IP$$

$$= 2.OP + MF$$

d'où

$$MF' - MF = AB$$

Donc le lieu des points M est une hyperbole dont F et F' sont les foyers et A et B les sommets.

Si le point F était intérieur, on ferait la même construction, et l'on trouverait facilement

$$MF' + MF = AB$$

Ce qui montre qu'alors l'enveloppe est une Ellipse.

Théorème. — Le Sommet d'un angle Trièdre Trirectangle dont les faces Restent Tangentes à une Surface du Second ordre, décrit une Sphère.

Concevons que, l'un des points de contact étant fixe, on fasse varier les deux autres. Si l'on imagine

un cylindre circonscrit à la surface donnée, dont les génératrices soient parallèles à l'intersection des deux plans tangents mobiles, les traces de ceux-ci sur le troisième, perpendiculaires entre elles, seront tangentes à la trace du cylindre sur le même plan, laquelle sera une section conique. Les normales à celle-ci menées par ses points de contact avec les deux arêtes de l'angle trièdre comprises dans son plan détermineront, par leur rencontre, le centre instantané de rotation du système de ces deux arêtes. Joignant ce point au sommet mobile, on aura la normale à la courbe plane qu'il décrit; mais les deux arêtes dont il s'agit et les normales correspondantes forment un rectangle dont les diagonales se coupent mutuellemt. en deux parties égales: l'une d'elles étant normale au lieu plan du sommet mobile, passe par le milieu de la corde des contacts, et par conséquent est un diamètre de la conique. — Il est facile d'en conclure que le plan perp. au plan fixe et normal à l'élément décrit est un plan diamétral de la surface proposée. Donc il passe par le centre. — Si l'on rend fixes chacun à son tour les trois points de contact, on obtiendra 3 plans diamétraux normaux aux éléments plans décrits, et se coupant suivant un diamètre de la surface; et d'ailleurs cette intersection est normale à la surface décrite. Donc toutes ces normales concourent au centre. Donc...

C.q.f.d.

(Paul Breton 1838)

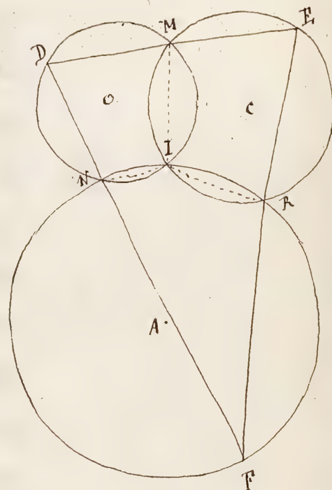
Théorèmes de Géométrie.

Th. I. Lorsque 3 circonf. se coupent en un même point I : si l'on joint un point F de l'une d'elles A aux points N et R où elle rencontre de nouveau les deux autres O et C ; les points D et E où les droites FN et FR couperont de nouveau les circonf. O et C seront en ligne droite avec avec la seconde intersection M de ces deux circonférences.

Car $(F + NIR) + (E + MIR) + (D + MIN) = 6$ dr.

d'où $F + D + E = 2$ dr.

Donc DEF est un triangle c.q.f.d.



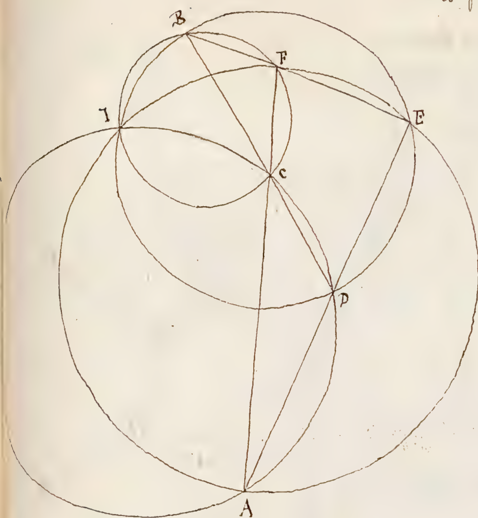
Ce théorème étant vrai quelles que soient les positions des trois circonférences et celles des 3 points sur ces circonférences, on peut dire :

Reciproq. I. – Lorsque 3 circonférences se coupent en I, si l'on tire DME quelconque, DN et ER se rencontrent en F sur la circonf. A.

Recipr. II. – Trois points M, N, R étant pris arbitrairement sur les côtés d'un triangle, si, par chaque sommet et les deux points situés sur les côtés qui y aboutissent on fait passer une circonférence, on obtient ainsi trois circonférences qui se coupent en un même point.

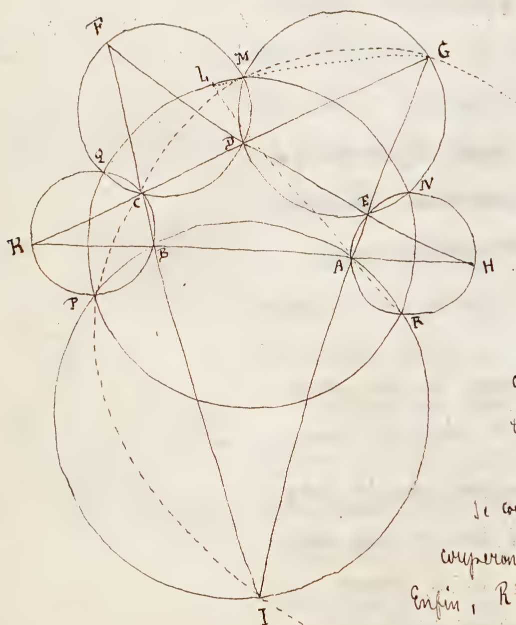
Th. II. Si l'on circonscrit des circonfér. aux quatre triangles ADC, CBF, AEF, BDE que forment

les côtés d'un quadrilatère complet ADEFBC, les quatre circonférences ainsi obtenues se coupent en un même point I.



En effet les 3 points BFE appartenant respectivement à chacun des trois côtés du triangle ADC; d'après la Réc. II, les 3 circonférences CBF, DEB, AEF se coupent en un même point. — on démontrerait de même que les 3 circonférences DEB, AEF, ADC se coupent en un même point. Donc toutes les 4 se coupent en un même point.

Th. III. — Soit un pentagone qcq. ABCDE. on prolonge les côtés. on circonscrit 5 circonf. aux triangles ABI, BCK, ... EAH. Les 5 points P, Q, M, N, R des 5 circonférences sont sur une même circonf.



Par les 3 points P, M, R je fais passer une circonférence. Je dis qu'elle passera en Q et N.

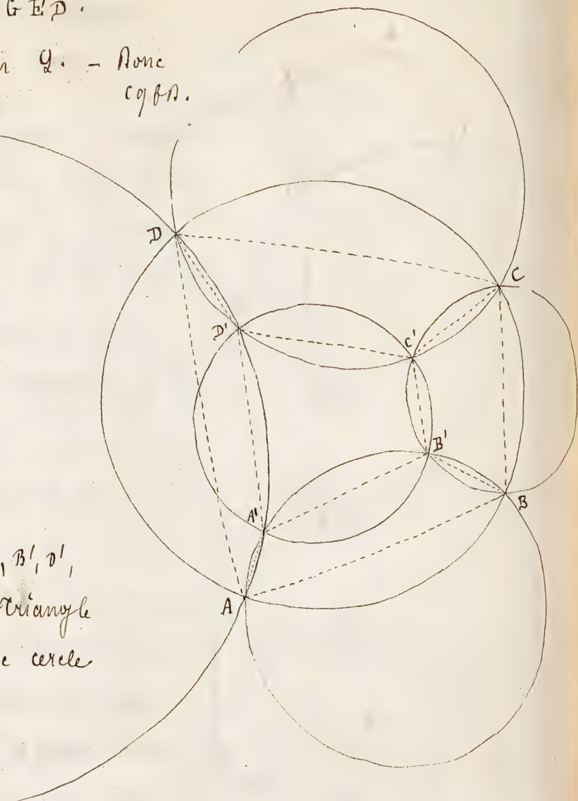
D'abord, en Q : — Je circonscris une circonf. au triangle ICG. Elle passera en P et M (quadrilatères IAGCKB et GEICFD).

Maintenant les circ. PMG, PMR, PAR se coupant en P, les droites GM et RA se couperont en L sur la circ. PMR. (Réc. I). —

Enfin, R, M, E sont sur les côtés du triangle ALG. Donc les 3 circ. ARE, LRM, GME se coupent en un

même point. Donc la circonférence PMR passe par le point N d'intersection des circ. HAE, GED.

On prouverait de même qu'elle passe en Q. – Donc cqfd.



Th. IV. – Lorsque 4 points A, B, C, D sont sur une même circ. si par les points consécutifs A et B, B et C etc. on fait passer des circ. qcq. du reste, les 4 secondes intersections A'.. C' de ces circ. se trouveront aussi sur une même circ.

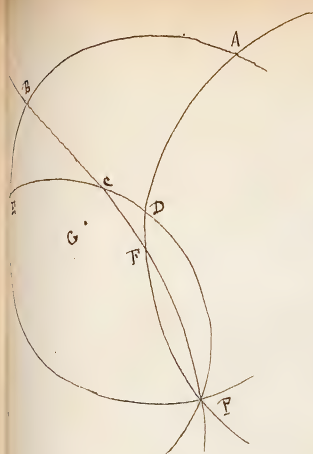
Car on démontre très-facilement que $B' + D' = 2dr.$

Réciproq. – Lorsque 3 points, C, B', D', sont respectivemt. sur chacun des côtés d'un triangle curviligne DBA' formé par trois arcs de cercle qui se coupent en un même point A; si l'on fait passer une circonf. de cercle par chacun des sommets de ce triangle et par les deux des trois points C, B', D' qui se trouvent sur les deux côtés aboutissant à ce sommet, les 3 circonférences ainsi obtenues se couperont en un même point, C'.

C'est évident.

Dans ce qui va suivre, nous désignerons les circ. et les sphères par 3 et par 4 de leurs points, sans les tracer.

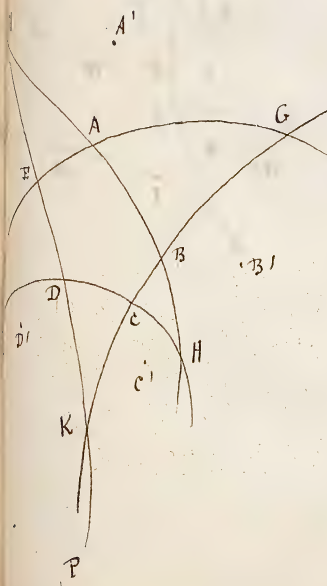
Th. V. – Lorsqu'un quadrilatère complet curvi-ligne ABCDEF est formé par 4 arcs de cercle qui se coupent en un même point P, les 4 circonf. EBC, EAD, FCD, FBA se couperont aussi en un



même point G.

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que 3 qcq. AFB, EBC, DCF se coupent en un même point. — or, d'après la Réciproque précédente, puisque les 3 points B, C, F sont situés respect.t sur chacun des côtés du triangle curviligne AED dont les côtés concourent d'ailleurs en P, les 3 circonf. indiquées se couperont en un même point G. Donc ... cqfd.

Th. VI. — Lorsqu'un pentagone complet curviligne ABCDEHKLMG est formé par 5 arcs de cercles qui, prolongés, se couperaient tous en un même point que nous appellerons P; en prenant ces arcs de cercle 4 à 4, on a évidem.t 5 quadrilatères complets curvilignes qui, d'après le Théorème précédent, sont tels que les circonf. circonscrites aux quatre triangles de chacun de ces quadrilatères se coupent en un même point. Je dis maintenant qu'on peut faire passer une circ. par les 5 points A', B'.. en chacun desquels se rencontrent les 4 circonf. circonscrites aux quatre triangles de chacun des 5 quadrilatères complets.



Pour le démontrer, il suffit de faire voir que 4 quelconques B', C', D', E' de ces 5 points se trouvent sur une même circ. or, puisque les 4 points F, H, C, D, L sont sur une même circ.; d'après le Th. IV, les 4 points B', C', D', E', qu'on peut considérer comme les secondes intersections des circ. consécutives LAH et HBC, HBC et CKD, CKD et DEL, DEL et LAH, se trouvent sur une même circ. — Donc ... cqfd.

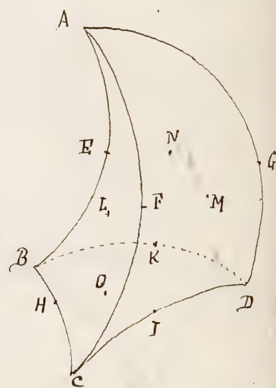
En supposant que le point P soit à l'infini, on retombe sur le Th. III.

Nous allons montrer maintenant que les 3 derniers théorèmes sont également vrais lorsque les cercles sont tracés sur la surface d'une même sphère. — Cette extension se déduit de ce théorème :

Th. VII. — Soit abaissée du centre o d'une sphère sur un plan qcq. une perp. oo'. En prenant pour pt point de vue un des points d'intersection de la sphère avec la perpend. oo', la perspective sur le plan de tout cercle tracé sur la sphère est aussi un cercle. — Et réciproquement.

La démonstration est aisée à retrouver.

Th. VIII. — Soit un tétraèdre curviligne ABCD formé par 4 surfaces sphériques qui se coupent toutes 4 en un certain point P de l'espace. Soient pris six points E, F, G, H, I, K respectivt. sur chacune des six arêtes. Si l'on fait passer une sphère par chacun des sommets du tétraèdre et par les 3 points qui sont sur les arêtes aboutissantes à ce sommet : 1°. Les 4 sphères ainsi obtenues se coupent 3 à 3 sur chacune des faces du tétraèdre ; 2°. Elles se coupent toutes quatre en un même point.



Car 1°. Les arcs AB, AC, BC se coupent en un même point P de la sphère PABC : et les points H, E, F appartenant aux côtés du triangle ABC, les 3 circonférences telles que AEF se couperont en un même point L. Or ces circonf. sont les intersections de la sphère PABC avec chacune des 3 sphères telles que

AEFG. Donc .. cqfd.

2°. Les intersections des 3 sphères PABC, PABD, PACD, PBCD avec la sphère AEFG sont évident^t. 3 circonf. qui se coupent en un même point A de la sphère PACD et deux à deux aux points E, F, G qui peuvent être considérés comme les sommets d'un triangle sphérique tracé sur cette dernière sphère et aux côtés duquel appartien-nent respectivem^t. les points L, M, N. Donc les circ. NEL, LFM, MGN se coupent en un même point de cette sphère AEFG. — Mais ces circ. sont les intersec-tions de cette sphère avec les sphères BEHK etc. qui comprennent respectiv^t. les points N et L; L et M; M et N. Donc ... cqfd.

*En supposant le point P à l'infini, on trouve le même théorème pour le cas d'un tétraèdre à faces planes.

(A. Miquel 1838.)

Sur un Problème de Combinaison.

Problème. — Etant donnés les n nombres entiers $1, 2, 3, \ldots (n-1), n$; si on les permute n à n, on aura $[n]$ permutations (ce symbole désigne le produit $1.2\ldots n$) quel est le nombre total de dérangements qui se rencontre dans ces $[n]$ permutations ?
(Problème proposé par Stern, Crelle, 1838, p. 100).

Quand un nombre est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un nombre plus petit que lui, on appelle cela un dérangement (Cramer, Introd. à l'analyse des courbes algébriq. appendice p. 658). Par exemple le terme 321 renferme trois dérangements.

Soit y_n le nombre total de dérangements pour les n nombres. Prenons en plus le nombre $n+1$ et cherchons une relation entre y_n et y_{n+1}. — Faisons pour cela parcourir au nombre $n+1$ les diverses positions qu'il peut occuper. — En le plaçant à la gauche de tous les termes, il augmente évidemt. chaq chaque terme de n dérangements. En le plaçant entre le premier et le second nombre, il introduit dans chaque terme $(n-1)$ nouveaux dérangements, et ainsi de suite. — Dans la 1ère position, le nombre des dérangements est donc $y_n + n[n]$; dans la seconde, il est $y_n + (n-1)[n]$; dans la 3e, $y_n + (n-2)[n]$ et ainsi de suite. Donc

$$y_{n+1} = (n+1)y_n + \frac{n(n+1)}{2}[n]$$

ou

$$y_{n+1} = (n+1)\, y_n + \frac{n}{2}\,[n+1] \qquad (A)$$

Cette équation donne celle-ci

$$y_{n+2} = (n+2)\, y_{n+1} + \frac{n+1}{2}\,[n+2]$$

Les deux équations réunies on déduit

$$y_{n+2} = (n+1)(n+2)\, y_n + \frac{2n+1}{2}\,[n+2]$$

de même

$$y_{n+3} = (n+1)(n+2)(n+3)\, y_n + \frac{3n+3}{2}\,[n+3]$$

et en général

$$y_{n+p} = (n+1)(n+2)\ldots(n+p)\, y_n + \frac{1}{2}\left(pn + \frac{p(p-1)}{2}\right)[n+p]$$

Faisant $n = 1$ on a $y_n = 0$. Donc

$$y_{p+1} = \frac{p(p+1)}{4}\,[p+1]$$

Changeant $p+1$ en n on a enfin pour le terme général

$$y_n = \frac{n(n-1)}{4}\,[n]$$

(Terquem, 1838.)

Sur les Moyennes, arithmétique et Géométrique, en Général.

Mr. Cauchy (cours d'analyse algébrique) a prouvé que l'on a

$$(1)\qquad \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

lorsque toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont égales, et

$$(2)\qquad \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

dans le cas contraire. — on démontre assez simplemt. ce théorème de la manière suivante.

Observons d'abord que les formules (1) et (2) sont nécessairement vérifiées lorsque $n=2$, car leur premier membre est alors égal à

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\left[\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right]^2}{2} + \sqrt{x_1x_2}$$

tandis que le second se réduit à $\sqrt{x_1x_2}$. — Cela étant, il suffit de montrer que si les formules (1) et (2) sont exactes pour une certaine valeur de n, elles ne cesseront pas de l'être en augmentant cette valeur d'une unité: en d'autres termes il s'agit de faire voir que si (1) et (2) sont vrais pour une valeur de n, il en sera de même la fonction

$$y = \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} - x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}$$

sera toujours positive ou nulle, ce dernier cas n'ayant lieu que si $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$. — or, en traitant

x_{n+1} comme une variable continue, et prenant la dérivée de y par rapport à cette variable, on la trouve égale à

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1}\right)^n - x_1x_2\cdots x_n$$

cette dérivée est donc une fonction croissante de x_{n+1}, laquelle s'évanouit quand

$$x_{n+1} = -(x_1+x_2+\cdots+x_n) + (n+1)\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

valeur qui se réduit à x_1 si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Pour des valeurs de x_{n+1} plus petites ou plus grandes que celle que nous venons d'écrire, cette même dérivée est successivement négative et positive, par suite la fonction y est successivement décroissante et croissante. Son minimum a lieu quand la dérivée se réduit à zéro. Ce minimum est

$$n.x_1x_2\cdots x_n\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} - \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\right)$$

et, d'après les formules (1) et (2) il est nul ou positif; donc à fortiori $y \geqq 0$. De plus, pour que $y=0$, il faut 1°. que le minimum déterminé ci-dessus soit nul, donc $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$; 2° que x_{n+1} ait précisém^t^. la valeur qui convient à ce minimum, c. à d. soit aussi égal à x_1.

(Liouville, 1839)

Sur quelques Séries.

Si l'on donne aux entiers m et n toutes les valeurs possibles, différentes de l'unité, on aura

$$(1) \qquad \sum \frac{1}{m^n - 1} = 1$$

pourvu que dans la somme on ne compte qu'une fois une même fraction. (Par ex. la fraction $\frac{1}{4095} = \frac{1}{2^{12}-1} = \frac{1}{4^6-1} = \frac{1}{8^4-1} = \frac{1}{16^3-1} = \frac{1}{64^2-1}$ ne doit être comptée qu'une fois.)

Soit p un nombre-puissance qcq. c.à.d. un qcq. des nombres 4 8 9 16 25 27 32 ... ; je dis que

$$(2) \qquad \sum \frac{1}{p-1} = 1$$

Soit r la < racine de p : soit n l'indice de cette racine. J'ai à démontrer que

$$(3) \qquad \sum \frac{1}{r^n - 1} = 1$$

faisant n = 2, 3, 4, 5, 6, .. nous aurons

$$\sum \frac{1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{r^2-1} + \sum \frac{1}{r^3-1} + \sum \frac{1}{r^4-1} + \ldots$$

or

$$(4) \qquad \begin{cases} \sum \frac{1}{r^2-1} = \sum \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \ldots \right) \\ \sum \frac{1}{r^3-1} = \sum \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^9} + \ldots \right) \\ \sum \frac{1}{r^4-1} = \sum \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^8} + \frac{1}{r^{12}} + \ldots \right) \\ \text{-- -- -- -- -- -- -- -- --} \end{cases}$$

ajoutant les termes placés dans une même colonne verticale, j'ai

$$\left. \begin{aligned} \sum \frac{1}{r^n-1} = \sum \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \ldots \right) + \sum \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^8} + \ldots \right) \\ + \sum \left(\frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^9} + \frac{1}{r^{12}} + \ldots \right) + \ldots \end{aligned} \right\} \qquad (5)$$

ou, en sommant chaque progression

$$\sum \frac{1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{r(r-1)} + \sum \frac{1}{r^2(r^2-1)} + \sum \frac{1}{r^3(r^3-1)} + \cdots$$

Les termes qui entrent dans une qcq. de ces sommes sont essentiellem^t. différents de ceux qui entrent dans tous les autres, puisque r n'est pas une puissance. Donc on reproduira tous ces termes si l'on prend la seule quantité $\frac{1}{m(m-1)}$ et qu'on attribue à m toutes les valeurs entières possibles, différentes de l'unité. Donc

$$(7) \qquad \sum \frac{1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{m(m-1)}$$

Mais on a, on le sait

$$\sum \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \cdots = 1$$

Donc ... cqfd.

L'Eq. (5) peut s'écrire

$$\sum \frac{1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{m^2} + \sum \frac{1}{m^3} + \sum \frac{1}{m^4} + \cdots$$

(Catalan 1842)

il y en a bien plus long que cela

Sur une transformation de courbes.

.... Étant donnée l'Éq. d'une courbe en coordonnées polaires, supposons qu'on substitue pour le rayon vecteur r, $R^{\pm n}$, et pour l'angle polaire ω, $n\Omega$. Il est évident qu'il en résultera une nouvelle courbe rapportée aux coordonnées polaires R et Ω, et que

$$r\frac{d\omega}{dr} = \pm R\frac{d\Omega}{dR}.$$

Donc les angles que font les rayons vecteurs tirés de l'origine commune aux points correspondants sur les deux courbes, avec les Tg., sont égaux. D'où il suit que si les courbes

$$F(r,\omega)=0 \qquad f(r,\omega)=0$$

se coupent sous l'angle i, les courbes transformées

$$F(r^{\pm n}, n\omega)=0 \qquad f(r^{\pm n}, n\omega)=0$$

se couperont aussi sous le même angle, au point correspondant à l'intersection des deux premières.

Le cas le plus simple auquel on peut appliquer cette méthode est celui des droites

$$r\cos\omega = \alpha \qquad r\cos(\omega-\theta)=\beta$$

(où α et β sont des paramètres arbitraires, et θ un angle donné), qui se coupent toujours sous l'angle θ. D'où l'on déduit sans peine que les deux systèmes curvilignes

$$(1) \qquad r^{\pm n}\cos n\omega = \alpha^{\pm n} \qquad r^{\pm n}\cos n(\omega-\theta)=\beta^{\pm n}$$

se coupent toujours, quels que soient α et β, sous l'angle constant $n\theta$.

Ce Résultat comprend quelques cas intéressants : par ex. si $n = 2$, on a le théorème suivant :

Un Système d'Hyperboles équilatères, concentriques et semblablement placées, sera coupé par un autre tel Système ayant le même centre que le premier, sous un angle constant double de celui que font les axes des deux Systèmes.

En posant $n = \frac{1}{2}$, on peut dire que :

Un Système de Paraboles, ayant le même foyer et semblablement placées, sera coupé par un autre tel Système, ayant le même foyer que le premier, sous un angle constant, moitié de celui que font les axes des deux Systèmes.

Il est évident encore que :

Dans un triangle formé par trois arcs d'Hyper-boles équilatères ayant le même centre (ou bien de paraboles ayant le même foyer), la somme des angles vaut deux angles droits.

Suivent une série de théorèmes dérivant de la même transformation, et fort curieux.

(William Roberts, 1848)

Théorème de M. Dupin.

Th. Si deux surfaces se coupent partout orthogonalement, l'intersection est une ligne de courbure des deux surfaces.

Ce th. est évident si l'une des deux surfaces est développable, vu que l'intersection coupe dans ce cas à angles droits toutes les arêtes de celle-ci, etc. Or, soient S, S' deux surfaces trajectoires orthogonales quelconques, C leur intersection. Si par un point de C on imagine un plan P tangt. à S', il sera normal à S. Faisons mouvoir ce plan de façon qu'il reste tangent à S' sur C; son enveloppe sera une surface développable trajectoire-orthogonale de S, et passant par C, et c'est par cette intersection C qu'elle est orthogonale à S. Donc C est une ligne de courbure de S. — De même pour S'.

(Finck, 1844)

Faux.

Construction des Caustiques par Réflexion sur les courbes planes.

On trouve aisément, comme on sait, pour ce genre de courb. caustiques, la formule

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R \cos i}$$

Dans laquelle p désigne la distance du point lumineux au point d'incidence, p' celle du point d'incidence au point où le rayon réfléchi rencontre la caustique, R le rayon de courbure de la courbe au point d'incidence, et i l'angle d'incidence. La formule est générale si l'on convient de donner les mêmes signes à celles des distances p, p', R qui sont d'un même côté de la tangente à la courbe au point d'incidence, et des signes contraires à celles qui sont de côtés différents.

Cette formule conduit à une construction élégante de la caustique par points. — Soit P le point lumineux; I le point d'incidence, R le centre de courbure, P' le point où le rayon réfléchi touche la caustique. Pour avoir le point P', on décrit sur IR pris pour diamètre une circonférence qui coupe PI en A. on prend sur cette circ. $RA' = RA$, de sorte que IA' est la direction du rayon réfléchi. La droite AA' coupe IR en un point B, et la droite PB coupe IA' au point P'.

Cette construction est générale. Pour la vérifier, il suffit de considérer PI' comme une transversale qui coupe les côtés du triangle AIA', et d'égaler le produit de trois segments non consécutifs au produit des 3 autres. on retombe alors sur la 1re. formule.

698.

Table des Matières.



701.

702.

705.

712.

713.

1715.

716.

121.

